tendit ad aequum
Ad Bibliothecam
Academiæ Scientiarum
Electoralis Boicæ Monachii

Math Un. 12-1

Matheseos Systemata & methodi
137.

R

Anwendung
der feinern
Mathematick
auf die
Physick, und Artillerie
herausgegeben
von

Anton Barth
der Gesellschaft Jesu Priester, und offentl. ord. Lehrer der Mathematick

zum
Gebrauche seiner Schüler.

Theoretischer Theil.

Enthält
die Gründe der Algebra und Geometrie.

München,
Im Verlag bey Johann Nep. Fritz, Churfl. Akademischen, und burgerl. Buchhändler nächst dem schönen Thurme.
1772.

Anwendung
der feinern Mathematick &c.

Imprimatur.

Sig. München in dem Churfürstl. hochlöbl. Bücher-Censur-Collegio, den 26. Novemb. 1771.

Wilhelm Wodiczka Secretär.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem hochgebohrnen

Herrn Herrn

Joseph Ferdinand Maria

des

heil. römischen Reichs Grafen

von

Salern

auf Geltolfing ꝛc. Sr. Churfürstl. Durchläucht in Baiern Rath, Kammerer, Generalfeldmarschall-Lieutenant, und Innhaber des löblichen

Artillerie Korps,

Generalinspecteur der sämmtl. Curfl. Zeughäuser,

des

hochadelichen Ritterordens des heil. Michaels

Großkreuz

meinem gnädigen Herrn Herrn ꝛc.

Hochgebohrner Reichsgraf gnädiger Herr Herr!

Euer Hochgräfl. Excellenz werden gnädig erlauben, ihrem erhabenen Namen, und ihrem erlauchten Urtheile eine Schrift zu wiedmen, welche durch die Materie die sie enthält, durch die Absicht, mit der sie geschrieben, so gar durch den Geist, und den Eifer, mit dem sie ist bearbeitet worden, einen gewissen Zuspruch, ja ein

kleines Eigenthumsrecht zu ihrer Gnade und Huld überkömmt: so, wie ihr Verfasser selbst durch mancherley Proben ihrer ausnehmenden Gewogenheit überzeuget ist, die er schon so viele Jahre genüßet.

Der Gegenstand meiner Schrift sind die zu verschiedenen, besonders aber zur Artilleriewissenschaft so nöthigen Gründe der Mathematick.

Meine Absicht ist, junge Leute, die wahre Lust hiezu, und genug Fähigkeit besitzen, in dieser dem Vaterlande so nützlichen Kunst wo nicht vollkommen zu unterrichten, wenigst dazu geschickt zu machen.

Der Eifer, mit dem ich diesen Gegenstand betrachte, ist eben so lebhaft und groß, als die mir und meiner Gesellschaft eigene Begierde ist, dem Vaterlande durch alle Theile der Wissenschaften, und in allen Gattungen seiner Bürger nützliche Männer zu bilden.

Ich

Ich habe beynahe in diesen wenigen Zügen den erhabenen Charakter geschildert, mit dem sie, Hochgebohrner Reichsgraf, schon mehrere Jahre her unter uns glänzen. Dieß sind die Züge, welche sie dem Staate so nützlich, den Baiern so ehrwürdig, den Auswärtigen so berühmt gemacht haben. Dieß sind die Züge, die jeder Patriot an ihnen mit Dank verehret. Dieß sind die Züge, nach denen ich meine Arbeit verfertiget, nicht in der Absicht, um ihnen gleich zü kommen, sondern weil ich mirs zur großen Ehre rechne, daß ich nicht ganz unfähig bin, dieselben in ihrer hohen Person zu bewunderen.

Wenn es eine Vermessenheit ist, sich mit großen und außerordentlichen Geistern in eine Vergleichung bringen, so ist wenigst die Eifersucht, dieselben zum Muster zu nehmen, allzeit rühmlich.

Und konnte es mir wohl schwer fallen in diesem Stücke eine Wahl zu treffen? oder würde nicht vielmehr das von ihren schimmernden Eigenschaften ge-

rührte Baiern mir es in den spätesten Zeiten noch vorrücken können, wenn ich mir zum Vorbilde meiner Absichten und meiner Arbeiten einen andern ausersehen hätte, als eben denjenigen, welcher nicht so wohl wegen der ihm anvertrauten hohen Stelle eines Generalfeldmarschall-Lieutenants von der Churbaierischen Artillerie, als wegen seiner großen Fähigkeit dazu, dem Vaterlande die ersprießlichsten Dienste, die reinesten Absichten, den unverdroßensten Eifer weihet.

Ich habe nicht nöthig, dieses erhabene Muster mit stärkern Farben zu entwerfen; Man kennet sie, Hochgebohrner Graf, aller Orten, und aller Orten wird man meiner so glücklich getroffenen Wahl Gerechtigkeit wiederfahren lassen. Oder, wer kennet ihre Verdienste nicht, Hochgebohrner? wer schätzet, wer bewundert, wer verehret sie nicht? Ich bin für meinen Theil überzeuget, daß ich ihnen ganze Lobreden schreiben dürfte, und daß vieleicht Euer Hochgräfliche Excellenz selbst unter allen, die sie zu kennen die Ehre

haben,

haben, der einzige seyn würden, welcher von einer Schmeicheley etwas vermuthete.

Gönnen sie, Erlauchter Graf, ihre große Talenten noch ferner dem Nutzen des Vaterlandes; unterstützen sie mit ihrem hohen Ansehen eine Wissenschaft, die zwar zum Schröcken der Menschen, aber auch zugleich zu ihrem Heil erfunden ist worden. Seyn sie immer, wie sie es bishero gewesen, die wirksame Seele, und der Geist eines Korps, welches unter ihren Befehlen, und ihrer Aufsicht zu arbeiten die Ehre hat.

Wie glücklich würde ich seyn, wenn ich durch dieses mein Werkgen auch nur das geringste beytragen könnte, ihre erlauchten Absichten beförderen zu helfen: wie glücklich, wenn aus meinen Studenten einige den Muth nähmen, unter der sorgfältigst- und gnadenvollen Aufsicht Euer Hochgräfl. Excellenz ihre Talente einst zum Flor des Vaterlandes in dem Artillerie Korps zu verwenden:

Wie glücklich würde ich seyn, wenn Euer Hochgräfl. Excellenz diese Schrift mit jener Art, die ihnen ganz besonders und allzeit eigen ist, das ist, gnädig aufnehmen sollten. Ich werde lebenslang mit der unveränderlichsten und vollkommensten Hochachtung seyn

Euer Hochgräfl. Excellenz

Meines gnädigen Herrn Herrn

Unterthäniger

Ant. Barth d. G. J.

Vorrede.

Ich will eben auch nicht der Erste seyn, der es gewagt haben soll, ein Buch ohne Vorrede zu schreiben. Sie soll aber so kurz werden, als es mög- lich. Daß es uns fast in allen Gattungen, besonders aber in der Mathematick, an deut- lichen Elementarbüchern gebricht, ist so ei- ne Wahrheit, von der alle die durch die Erfahrung überzeuget sind, die sich Amtes oder Berufes halber mit Lehren beschäfti- gen.

Die gar zu ängstigen Beweise einer Menge tiefsinniger Lehrsätze, die weiters nichts, als den durchdringenden Verstand eines einsamen Meditantens an seinem

Schrei-

Schreibepult zu vergnügen taugen, bilden den Anfängern die Mathematick so traurig ab, daß ihnen die Beschwernisse unüberwindlich vorkommen, und die trockene Arbeit nothwendig saur und verdrüßlich werden muß, von der sie noch, so zu sagen, auf etliche Meilen weit, keine Früchte sehen.

Wahr ists, die ordentliche Entwickelung der richtig aufeinander folgenden Sätze hat jederzeit das innere Wesen, und das Schöne der Mathematick ausgemacht.

Wird es aber nicht schöner seyn, wenn wir auf eben diese Art nur die nützlichsten, und practischen Lehrsätze in unsrer Geometrie zu entwickeln hervorsuchen, die wir wohl tausendmal in unsrem Leben zum Nutzen des gemeinen Wesens werden anwenden können, ohne uns mit Kleinigkeiten aufzuhalten, worüber wir ohne Nachtheil der Mathematischen Lehrart, hingehen

hen können; und ohne Beschwernisse aufzusuchen, die ein Anfänger erst alsdann von sich selbst würde gefunden haben, wenn er eine Menge anderer schon mit Lust überwunden, und zum Nachdenken durch sein angenehmes Studiren tauglicher geworden?

Ich schrieb dahero für mich nach diesem meinem privat Geschmacke eine Geometrie, der ich die nöthigsten Gründe der Allgebra, um im Beweisen besser fortzukommen, vorausschickte. Ich befließ mich, sie meinen Schülern so beyzubringen: Ich gab sie etwelchen aus ihnen (benanntlich einigen Herren Churbaierischen Artilleristen, die ich privat unterwies) bogenweis mit nachhause ohne vorhin ihnen auch nur eine Zeile zu erklären. Der Versuch war so glücklich, daß sie oft alles, insgemein das mehrste ohne meine Erklärung begriffen. Kam da und dort eine für sie noch dunkle oder verwickelte Stelle vor, verbesserte und verdeutschte ich sie so lang, und gab es jetzt

dem,

dem, jetzt einem anderen mit, bis sie auch von denen verstanden ward, die unter meinen Schülern eben nicht die Allerbesten waren.

Indessen gaben mir Se. Hochgräfl. Excellenz ihr ernstliches Verlangen öfters deutlich genug zu verstehen, ein Elementarbuch aus der Mathematick zu haben, dessen sich auch die Geschicktere aus den ihrigen zur Beförderung der Churbaierischen Artillerie bedienen könnten.

Dieß war schon hinlänglich, daß ich meine Blätter drucken Ließ, und hin und wieder zur Artillerie gehörige Aufgaben beysetzte.

Es ist freylich die Mathematick jederzeit so eine Wissenschaft gewesen, die nicht eben ein jeder Kopf zu begreifen fähig. Es ist aber auch nicht vonnöthen, daß alle Artilleristen Mathematicker seyn. Aber das ist vonnöthen, daß es in einem Artillerie

Korps

Korps immerzu mehrere gebe, die mit einer blos practischen Wissenschaft nicht zufrieden sich an die Theorie selber wagen, und sich allgemeine Lehrsätze bekannt machen, die sie hernach in allen Fällen, die ja tausend Veränderungen ihrer Umstände unterworfen sind, anzuwenden wissen. Das ist vonnöthen, daß sie sich aus alten und neuen Scribenten die schönsten Erfindungen in der Meßkunst, in der Mechanick, in der Hydraulick, in der Statick, in der Kriegsbaukunst, u. s. w. bekannt machen. Sind sie aber nur in den Grundsätzen der Algebra und Geometrie nicht geübet, werden sie der fürtreflichsten Werke entraten müßen, und sie aus Verdruß mit Unwillen beyseite legen, sobald ihnen ein allgebraisches $xy=\frac{y^3}{a}$ auch nur von weiten entgegen kömmt. Belidors unverbesserliches Werk von der Hydraulick, Kriegers eines noch lebenden Jesuiten vor wenig Jahren im Druck verfertigte nach den neusten Ge-

Geschmacke eingerichtete Civil- und Kriegsbaukunst, Guiots trefliche Abhandlung über die Meßkunst, und eine Menge andrer (sollten sie auch die glücklichsten Uebersetzer noch so verdeutschet haben) werden dennoch für solche Leute noch immer hebraisch- und chaldaische, das ist, unbrauchbare Bücher bleiben, ob sie schon hauptsächlich für sie geschrieben worden.

Ich bin darum auch in meiner Allgebra so wohl, als Geometrie nicht weiter gegangen, als eben nöthig ist, die neusten Bücher zu verstehen, und selbst, wenn man nur will, durch eigenen Priwatfleiß weiter zu kommen.

Die gar zu rauhen und tiefsinnigen Beweise, die zur Practick großen theils unnützen Lehrsätze der Alten, mit welchen so gar auch Belidor in seinem *Cursu mathematico*, den er zum Gebrauch der Officiers von der Artillerie geschrieben, seine

Schüler

Schüler nicht verschonet, habe ich gerne weggelassen, und mich einer weit leichteren Beweisungsart bedienet, als man vieleicht in dieser Wissenschaft würde erwartet haben.

Die Winkel, wo es nicht nöthig war, sie durch alle drey Buchstaben des Dreyeckes auszudrücken, wollte ich, Deutlichkeit halber, lieber mit einem einzeln, den ich zwischen die Schenkel hineingeschrieben, benennen.

Um der dunkeln Verwirrung eines Anfängers auszuweichen, wollte ich überdas lieber mehrere Figuren verfertigen, als mich der nemlichen Figur zum Beweise mehrerer Lehrsätzen bedienen.

Von der gemeinen Arithmetick hatte ich gar nicht Ursache auch nur ein Wort zu schreiben. Sie wird schon von etwelchen Jahren her in unsern unteren Schulen der Jugend von geübten Lehrern bey-

gebracht, daß ich in meinen Vorlesungen nur kurz zu wiederholen habe, was sie schon von anderen erlernet. Von den hiesigen Herrn Artilleristen aber weiß ich aus der Erfahrung, daß viele recht zur Verwunderung, mehrere sehr wohl, und fast alle mehr als mittelmäßig in der gemeinen Arithmetick geübt seyn.

Nur von der Decimal- und Logarithmusrechnung werden wir vieleicht ein paar Worte sprechen, weil sie uns besonders in der practischen Stereometrie, in der Trigonometrie, und in der Physick große Dienste thut.

Ich habe es aber schon gesagt: es ist nicht allen gegeben, und nicht ein jeder Gelehrter, viel weniger ein jeder Artillerist, muß eben auch ein Allgebraist- oder Mathematicker seyn. Eine auch nur practische Wissenschaft eines unstudierten Feuerwerkers in fertiger Ausübung der

theorethischen Lehrsätze, ob er schon die Beweise davon nicht einsieht, vermag manchmal weit mehr, als die allertiefsinnigsten Erfindungen und Betrachtungen eines hochstudierten Allgebraistens oder Geometers, der z. B. alle auch verborgneste Eigenschaften einer Parabole auf seinem Papier entdecket, ohne zu wissen, wie man es denn angreifen müße, wenn man wirklich eine Bombe werfen soll. Ja: aber sehr ungereimt würde man folgern, wenn man hieraus schließen wollte, daß man hiemit in der Artillerie so wohl, als andern Künsten und Wissenschaften der theoretischen Mathematick ohne weiters entbehren könne, und etwann die practische Werkschule eines Bions hinlänglich genug sey, nutz- und taugliche Leute zu gestalten.

Für Leute nun, die zur theoretischen Mathematick weder Lust, noch genug Fähigkeit besitzen, habe ich das Verzeichniß

der practischen Aufgaben am Ende meiner Geometrie beygesetzt, und der ganze zweyte Theil meines Werkes wird, wo nicht alles, doch das mehrste enthalten, was solchem Practikanten zu wissen nöthig ist, wenn sie nur vorhin in der gemeinen Rechenkunst wohl geübet sind.

Nun ist alles beysam, was ich meinen Lesern vorläufig über die Verfassung meines Werkgens, nnd über meine Arbeit zu sagen hatte, die ich nicht nur zum Nutzen der studierenden Jugend, für die ich ohnfehlbar in Latein würde geschrieben haben, sondern auch für alle diejenige auf mich genommen, die in verschiedenen Künsten dem Vaterlande Nutz und Ehre zu bringen berufen sind.

Gefällt meine Arbeit nicht, so kann doch mein gutes Herz nicht mißfallen. Hat sie aber den Beyfall meiner Leser verdienet, so wird dieser eine mehr dann zureichende Belohnung meiner Bemühung seyn.

Kurze

Kurze
Abhandlung
von den ersten
Gründen der Allgebra.

I. Abschnitt.
Vorläufige Erklärungen.

§. 1.

Die Allgebra, welche eine Wissenschaft ist, aus bekannten Grössen unbekannte zu finden, ist eigentlich nichts anders, als eine Arithmetick, welche aber, weil sie sich statt der bestimmten Zahlen der unbestimmten Buchstaben des *a*, *b*, *c* bedienet, zu einer Universalarithmetick wird, durch die wir

allgemeine Regeln finden, eine unendliche Menge Aufgaben, die aus dem nämlichen Fache sind, auf einmal damit aufzulösen.

§. 2. Eine allgebraische Grösse wird genennt alles das, was sich vergrössern, oder verkleinern, vermindern, oder vermehren läßt.

§. 3. Zween verschiedne Ausdrücke der nämlichen Grösse werden eine allgebraische Gleichung genennt. So wird die Grösse 8 sowohl durch 3 und 5, als durch 6 und 2, oder durch 10 weniger 2 ꝛc. ausgedrücket. Es heißet demnach 3 und 5 gleich 6 und 2 ꝛc. eine Gleichung.

§. 4. In der Allgebra bedient man sich verschiedner Zeichen, die alle ihre besondere Bedeutungen haben. Zwo Gattungen der Grössen aber giebt es in der Allgebra. Die erste wird (quantitas positiva) eine wirkliche Grösse, die vorhanden ist; die andere (negativa) ein Mangel, oder eine abgehende Grösse (z. B. eine Schuld) genennet. Beyde werden durch das vorangesetzte Zeichen unterschieden. Die wirkliche Grösse wird durch +, der Mangel aber durch — angedeutet. Jenes wird *signum positivum*, dieß aber *signum negativum* genennet. Krü-

ger

ger in seinen Gedanken über die Algebra dolmetschet + das Zeichen einer wirklichen, — das Zeichen einer verneinenden Grösse.

§. 5. Ueberdas bedienen sich die Mathematicker in ihren arithmetisch- und allgebraischen Operationen überhaupt dieser, und noch andrer Zeichen; dann (+) ist bey ihnen das Zeichen der Addition. Wenn ich also sehe $a + b$, heißet dieß die Summe von a und b. (—) ist bey ihnen das Zeichen der Subtraction. Folglich $a - b$ heißt die Differenz zwischen a und b, man liest: a weniger b. (=) ist bey ihnen das Zeichen der Gleichheit. Dahero $a = m$ heißet, es sey die Grösse a der Grösse m gleich. (×) ist das Zeichen der Multiplication. Wenn wir also sehen $a + b \times a - b$ heisset es $a + b$ multiplicirt durch $a - b$, oder so $(a + b) . (a - b)$ oder $\overline{a + b} \times \overline{a - b}$.

Wenn man nur einfache Grössen multiplicirt, schreibt man sie gleich so, ohne Zeichen, aneinander hin. Z. B. $a\,b$ heißet a multiplicirt durch b.

Die Grössen, welche man durcheinander multiplicirt, werden Efficienten, oder Factores genennt.

Zuweilen werden die Buchstaben auch durch Zahlen multiplicirt. Z. B. Ich soll die Grösse a 3 oder 5 mal nehmen, so schreibe ich 3 a, oder 5 a. Wo denn die Zahl 3, oder 5 der Efficient der Grösse a ist. (:) ist das Zeichen der Division. Also $a : b$ heißet eben so viel, als a dividirt durch b.

Man schreibt aber öfter $\frac{a}{b}$, welches eben so viel sagt.

Ist die einte, oder sind alle beyden aus mehrern zusammgesetzte Grössen, schreibt mans so: $(a+b) : c$, das ist, die Summe von $a+b$ dividirt durch c. So auch $(a+b) : (c-d)$ das ist: die Summe von $a+b$ dividirt durch die Differenz $c-d$.

Man kann aber auch so schreiben $\frac{a+b}{c}$, und $\frac{a+b}{c-d}$, welches das nämliche ist.

Die ersten Operationen der Allgebra sind die nämlichen, wie in der Arithmetick, die Addition, die Subtraction, die Multiplication, und die Division.

II. Abschnitt.

II. Abschnitt.

Von den ersten Operationen der Allgebra.

§. 6. I. Aufgabe. Unbestimmte Grössen addiren.

Auflös. Man merke die einzige Regel: Wann die Zeichen der Grössen, die man addiren soll, gleich, oder die nämlichen sind, addirt man, wie in den gemeinen Zahlen.

Z. B. Ich soll zu $6a + 5b - 7c$
addiren $4a + 3b - 2c$

So ist die Summe $= 10a + 8b - 9c$

Sind aber die Zeichen ungleich, so verändert man die Addition in die Subtraction; das ist, man zieht das Kleinere vom Grössern ab, und setzet dasjenige Zeichen voraus, welches bey der grösseren Quantität gestanden.

Z. B. Ich soll zu $6a + 3b - 7c$
addiren $-7a - 5b + 3c$

So ist die Summe $= -a - 2b - 4c$

Sind endlich auch die Buchstaben ungleich, schreibt man sie sammt ihren Zeichen ohne weiters nacheinander hin.

§. 7. II. Aufgabe. Unbestimmte Grössen voneinander subtrahiren, oder abziehen.

Aufl. Man merke die einzige Regel: Alle Zeichen derjenigen Grössen, die du von andern abziehen sollst, verändere; und setze die Entgegengesetzte dafür hin, das ist: wo das Zeichen + stehet, schreibe —, und wo — stehet, schreibe +. Wenn dieß geschehen, addire die Grössen nach der obern Regel, so ist die allgebraische Subtraction vollbracht.

Z. B. Ich soll von	$9b + 15c - 7d + 8e - f$
subtrahiren	$6b + 20c - 9d - 9e + 7f$
So muß ich zu	$9b + 15c - 7d + 8e - f$
Nach geänderten Zeichen addiren	$-6b - 20c + 9d + 9e - 7f$
Ist also die Differenz	$3b - 5c + 2d + 17e - 8f$

Wenn wir nur bedenken wollen, daß einen Abgang, oder eine Schuld addiren, eben so viel, als eine Schuld machen heiße; werden wir uns nimmer verwundern, daß die Summe von $+ 9\,b$ und $- 6\,b$ $= 3\,b$ seye; denn es ist richtig, wenn ich nur 9 Gul-

den

den habe, und eine Schuld von 6 Gulden mache, daß mir nur 3 überbleiben, die noch mein sind. Wodurch unsre Regel sowohl von der Addition, als Subtraction erwiesen.

§. 8. III. **Aufgabe.** Unbestimmte Grössen durcheinander multipliciren.

Auflösung. Man merke die einzige Regel: *Wenn beyde Efficienten, oder Factoren das nämliche Zeichen haben (es sey + oder —) setzt man jederzeit dem Producte das Zeichen + vor. Haben sie aber verschiedne Zeichen vor sich, wird dem Producte das Zeichen — vorgesetzt.* Im übrigen geschieht die Multiplication eben so, wie in den ordinari Zahlen.

Z. B. Ich soll multipliciren $3a + 2b - d$

durch $2a - b$

$$\begin{array}{r} -3ab - 2bb + bd \\ 6aa + 4ab - 2ad \\ \hline \end{array}$$

So ist das Product $= 6aa + 4ab - 3ab - 2ad - 2bb + bd$

oder kürzer $= 6aa + ab - 2ad - 2bb + bd$

§. 9. IV. **Aufgabe.** Unbestimmte Grössen dividiren.

Aufl.

Aufl. Man merke, wie in der Multiplication, die einzige Regel: Wenn die zwo Grössen, oder Quantitäten, die ich miteinander dividiren soll, einerley Zeichen vor sich haben, setzt man jederzeit dem Quotienten das Zeichen + vor; haben jene aber verschiedne Zeichen, eine + die andere —, so wird dem Quotienten das Zeichen — vorgesetzt. Im übrigen geschieht die Division eben so, wie in den ordinari Zahlen.

Ehe ich ein Exempel der Division gebe, muß ich den Anfänger eines Lehrsatzes erinneren, den ich erst weiter unten erweisen kann, der Anfänger aber jetzt gleichwohl für erwiesen annehmen muß. Er heißet so.

Lehrsatz. Wenn man ein Product ab durch einen aus den zweenen Factoren dividirt, wird der Quotient jederzeit der andre Factor seyn. Ist also $\frac{ab}{a} = b$ und $\frac{ab}{b} = a$

Wiederum ist $\frac{abc}{b} = ac$ und $\frac{abc}{a} = bc$

und $\frac{abc}{c} = ab$. $\frac{abc}{ac} = b$. $\frac{abc}{ab} = c$ 2c.

Dieß

Dieß begreiflicher zu machen, wollen wir für die Buchstaben a, b, c, drey Zahlen hersetzen. a soll 3, b soll 4, c soll 2 bedeuten. So ist $a \times b$ oder $ab = 3 \times 4$ oder 12.

$$\frac{ab}{a} = \frac{12}{3} = 4 = b$$

$$\frac{ab}{b} = \frac{12}{4} = 3 = a$$

Wiederum $\frac{abc}{b} = \frac{3 \times 4 \times 2}{4} = \frac{24}{4} = 6 = 3 \times 2 = ac$

$$\frac{abc}{a} = \frac{3 \times 4 \times 2}{3} = \frac{24}{3} = 8 = 4 \times 2 = bc$$

$$\frac{abc}{ac} = \frac{3 \times 4 \times 2}{6} = \frac{24}{6} = 4 = b$$

$$\frac{abc}{bc} = \frac{3 \times 4 \times 2}{8} = \frac{24}{8} = 3 = a$$

Man sieht aus diesen Beyspielen leicht, daß um ein Product mit einem aus den Factoren zu dividiren mehr nicht nöthig sey, als die gleichen Grössen bey-

derseits auslöschen; die Grösse, der ich im Theiler keine Gleiche finde, ist der Quotient.

Stünde aber z. B. *b* oben, und *a b c* unten als der Theiler, $\frac{b}{abc}$, so läßt sichs nicht dividiren, sondern ist ein Bruch, von denen wir unten handeln werden, und heißt in unsern angenommenen Zahlen $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. Jetzt wollen wir ein Exempel der Division vor uns nehmen.

Es ist $(a + b) \times (a - b) =$ dem Product $aa - bb$. Wenn wir nun dieß Product durch $a + b$ dividiren, wird der Quotient $a - b$ heißen. Dividiren wir es aber durch $a - b$, so ist der Quotient $a + b$. Die Operation sieht ohngefähr so aus.

Der Divisor $a + b$) $aa - bb$) $a - b$ der Quotient

$$
\begin{array}{r}
aa + ab \\
\hline
-ab - bb \\
-ab - bb \\
\hline
0
\end{array}
$$

Nur dieß hab ich noch von der Division zu erinnern, daß, wenn ein Rest herauskömmt, und sich die

die gegebene oder restierende Grösse nicht mehr dividiren läßt, man die Division nur anzeige, und wie eine Fraction schreibe. Z. B. $\frac{a+b}{c+d}$

§. 10. Von den Fractionen habe ich hier gar nichts zu sagen. Man verfährt mit ihnen in der Algebra, wie in der gemeinen Zahlrechnung. Die Operationen sind die nämlichen, und bleibt alles bey den bekannten Regeln der Arithmetick. Es wird also hinlänglich seyn, wenn ich nur von jeder Operation ein Beyspiel hersetze.

I. Man soll folgende Fractionen unter den nämlichen Nenner bringen $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$ so kömmt heraus $\frac{bc}{ac}$, $\frac{ad}{ac}$. Oder diese: $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{f}{e}$.

So bekömmt man: $\frac{bce}{ace}$, $\frac{ade}{ace}$, $\frac{acf}{ace}$ rc.

II. Man soll folgende Brüche kleiner machen, ohne ihren Werth zu ändern.

$$\frac{bc}{ac},\ \frac{ad}{ac},\ \frac{bce}{ace},\ \frac{ade}{ace},\ \frac{acf}{ace}\ \text{rc.}$$

So

So bekömmt man $\frac{b}{a}, \frac{d}{c}, \frac{b}{a}, \frac{d}{c}, \frac{f}{e}$ rc.

Man darf nämlich nur oben im Zähler, und unten im Nenner die gleichen Grössen weglassen, so ists geschehen.

III. Man soll folgende Brüche addiren. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

So bekömmt man $\frac{ad+bc}{bd}$

IV. Man soll sie voneinander subtrahiren, so bekömmt man $\frac{ad-bc}{bd}$

V. Man soll folgende Fractionen multipliciren:

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$, so bekömmt man $\frac{ac}{bd}$

VI. Man soll die Fraction $\frac{a}{b}$ mit c multipliciren.

So bekömmt man $\frac{ac}{b}$

V.

V. Man soll sie mit c dividiren. So bekömmt man $\frac{a}{bc}$

VI. Man soll die Fraction $\frac{a}{b}$ durch eine andere Fraction $\frac{c}{d}$ dividiren; so bekömmt man $\frac{ad}{bc}$

VII. Man soll eine Grösse m in eine Fraction verkehren, die dem m gleich ist, und n für ihren Nenner habe; so bekömmt man $\frac{mn}{n} = m$

III. Abschnitt.

Von den Dignitäten überhaupt.

§. 10. Wenn man eine Grösse a durch sich selber multiplicirt, nennt sich das Product aa die zweyte Dignität, oder das Quadrat von a. Die Grösse a aber ist die Quadratwurzel von der Dignität aa.

Wenn man eben diese Grösse a zweymal durch sich selber multiplicirt $a \times a \times a$, heißet das Product

$a\,a\,a$ die dritte Dignität, oder der Cubus von der Cubickwurzel a.

Wird endlich die Grösse a drey-vier-fünfmal ꝛc. durch sich selber multiplicirt, wird das Product $a\,a\,a\,a$ die vierte, $a\,a\,a\,a\,a$ die fünfte, $a\,a\,a\,a\,a\,a$ die sechste Dignität von der Wurzel a seyn, u. s. w.

Um die Grade der Dignitäten kürzer auszudrücken, schreiben wir statt $a \,.\, aa \,.\, aaa \,.\, aaaa \,.$ ꝛc. $a^1 .\ a^2 .\ a^3 .\ a^4$ ꝛc. das ist, die erste, die zweyte, die dritte, die vierte Dignität von a.

Diese kleinen oben angeschriebene Ziffern werden Exponenten der Dignitäten genennt, und zeigen uns an, wie oft die Wurzel habe müßen genommen werden, um diesen Grad zu erreichen. So muß z. B. die Grösse a, wenn ich sie zweymal mit sich selber multipliciren will, dreymal genommen werden, nämlich $a \times a \times a$, worinn das Zeichen der Multiplication nur zweymal vorkömmt, die Grösse a aber dreymal. Es ist also $a \times a \times a = aaa = a^3$.

Ist der Grad unsrer Dignität unbestimmt, setzt man statt der Ziffer einen kleinen Buchstaben hinauf an die rechte Seite der Wurzel. So bedeutet z. B.

a^m

a^m was immer für eine Dignität von a. So schreibt man auch x^d, b^n ꝛc.

Ein Anfänger hat sich hier zu hüten, daß er die Quantität $2a$ mit der Dignität aa, oder a^2 nicht vermische; sie sind himmelweit unterschieden; denn wir wollen a für 5 gelten laßen, so wird $2a = 2 \times 5 = 10$ seyn, aa aber, oder $a \times a$ wird $5 \times 5 = 25$ heißen, $= a^2$. und so von andern Dignitäten.

§. 11. Das Zeichen ($\surd$) bedeutet, daß man aus der dabeystehenden Grösse die Quadratwurzel ausziehen solle. Soll man aber die Cubick, oder einer höheren, oder gar die Wurzel einer unbestimmten Dignität herausziehen, wird solches durch die oben darauf geschriebne kleine Zahl oder Buchstaben angedeutet. Z. B. $\sqrt{a+b}$ bedeutet die Quadratwurzel von $a+b$. $\sqrt[3]{a+b}$ die Cubickwurzel von der nämlichen Summe $a+b$. $\sqrt[m]{a+b}$ eine unbestimmte Wurzel davon.

In der Arithmetick setzt man dieses Zeichen hauptsächlich nur denjenigen Zahlen vor, deren Wurzel man nicht genau mit Ziffern ausdrücken kann. Z. B. $\surd 2$. $\sqrt[3]{10}$. ꝛc. Und solche Zahlen, oder Quantitäten werden Irrationalgrössen genennt.

IV. Abschnitt.
Von den ersten Operationen der allgebraischen Dignitäten.

§. 12. I. Aufgabe. Zwo oder mehr Dignitäten durcheinander multipliciren.

Auflös. Man addire die Exponenten der gegebnen Dignitäten: die Summe wird der Exponent des gesuchten Products seyn.

Beyspiel. $a^3 \times a^2 = a^5$. und $a^m \times a^n = a^{m+n}$
Wiederum $a \times a^2 = a^3$. und $a^r \times a = a^{1+r}$
Denn es ist a eben so viel, als a^1.

§. 13. II. Aufgabe. Zwo gegebne Dignitäten durcheinander dividiren.

Auflös. Man ziehe den Exponenten des Divisors von dem Exponenten der andern Dignität ab, die man dividiren will. Der Rest wird der Exponent des gesuchten Quotienten seyn.

Beyspiel. $\frac{x^7}{x^4} = x^3$ und $\frac{y^{m+n}}{y^n} = y^m$

Wie-

Wiederum $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$ $\frac{c^n}{c} = c^{n-1}$

§. 14. Hieraus ziehen wir nun einen in der Algebra wichtigen Lehrsatz, nämlich: **Eine jede Grösse** a, **wenn sie zur Dignität, wovon der Exponent eine Nulle (o) ist, erhoben wird, ist sie = 1.**

Es ist folglich $a^0 = 1 . b^0 = 1 . x^0 = 1$. u. s. w.

Beweis. a^0 entsteht, wenn ich was immer für eine Dignität a^m durch sich selber dividire; denn es ist $\frac{a^m}{a^m} = a^0$. Nun ist $\frac{a^m}{a^m} = 1$ (in dem ja jede Fraction, wenn ihr Zähler dem Nenner gleich ist, ein ganzes heißet) folglich ist auch $a^0 = 1$. w. z. e.

§. 15. III. **Aufgabe. Eine gegebne Dignität** x^n **zu einer andern erheben, wovon der Exponent** m **gleichfalls gegeben wird.**

Auflösung. Man multiplicire den gegebenen Exponenten m durch den Exponenten n der gegebnen Dignität x^n. Das Product $m\,n$ wird der Exponent der gesuchten Dignität seyn.

Beysp. Die Dignität n^3 soll zur vierten Dignität erhoben werden. Weil nun der Exponent der vierten Dignität $= 4$ ist, so multiplicire 4 durch 3, das Product 12 ist der Exponent der gesuchten Dignität n^{12}; denn die vierte Dignität von n^3 ist $= n^3 n^3 n^3 n^3 = n^{3+3+3+3} = n^{3 \times 4} = n^{12}$.

Eben so, wenn wir x^n zur Dignität m erheben, bekommen wir x^{mn}.

Oder, wenn wir $x^{\frac{q}{s}}$ zur Dignität r erheben, bekommen wir $x^{\frac{qr}{s}}$.

§. 16. IV. **Aufgabe.** Aus jeder gegebnen Dignität a^m die Wurzel des gegebnen Exponenten n ausziehen.

Auflös. Den Exponenten m der gegebenen Dignität a^m dividire man durch den gegebenen Exponenten n der verlangten Wurzel. Der Quotient wird die gesuchte Wurzel seyn.

Beysp. Man soll aus a^6 die Quadratwurzel ausziehen. Weil der Exponent des Quadrats $= 2$, so dividire man 6 durch 2. Es ist aber $\frac{6}{2} = 3$. Folglich ist die Quadratwurzel von $a^6 = a^3$.

Man soll aus b die Cubickwurzel ausziehen, so ist $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$, und überhaupt ist $\sqrt[m]{a^p} = a^{\frac{p}{m}}$.

§. 17.

§. 17. I. Zusatz. Wenn man eine einfache Grösse zu was immer für einer Dignität erheben will, muß der Exponent zu jedem Buchstaben der gegebenen Grösse in Sonderheit geschrieben werden. Also ist z. B. die dritte Dignität von $abc = a^3 b^3 c^3$, und die Dignität m von $\frac{ab}{cd} = \frac{a^m b^m}{c^m d^m}$. Endlich ist der Cubus von $\frac{2ab}{5cd} = \frac{8a^3b^3}{125c^3d^3}$ ꝛc.

§. 18. II. Zusatz. Soll eine zusammgesetzte Grösse, wie $aa - bc$, zur Dignität m erhoben werden, pflegt man dieß nur so anzuzeigen, $\overline{aa - bc}^{\,m}$, oder so, $(aa - bc)^m$.

V. Abschnitt.

Von der Regel der Algebra.

§. 19. Drey Theile sind es hauptsächlich, welche die Regel der Algebra ausmachen. 1. Die Denomination, oder Benennung der Grössen.

2. Die Aequation oder Gleichung. 3. Die Reduction, oder Auflösung der Aequation.

§. 20. Die allgebraische Denomination besteht darinn, daß man die bekannten Grössen mit den ersten, die unbekannten aber, welche man sucht, mit den letzten Buchstaben aus dem *a b c* benenne.

Die Kunst recht und tauglich zu denominiren, muß man durch die Ubung erlernen, und ein wiziger Verstand muß dabey das beste thun. Doch soll ein Anfänger 1. die Umstände und Bedingnisse der Aufgabe wohl überlegen.

2. Soll er die bekannten Grössen von den unbekannten fleißig unterscheiden.

3. Soll er nicht mehr Buchstaben in der Benennung brauchen, als ihm eben nöthig sind.

4. Soll er wissen, daß er in jeder Aufgabe so viel Aequationen haben müße, als sich darinn unbekannte Grössen befinden:

§. 21. Eine allgebraische Aequation ist ein allgebraischer Ausdruck einer oder mehr Bedingnisse, die in der Aufgabe vorkommen. Uberhaupt ist eine Ae-

qua-

quation eine Vorstellung der nämlichen Grösse durch zween verschiedne aber gleiche Ausdrücke.

Z. B. $6=4+2=7-1=2\times3=\frac{36}{6}=\sqrt{36}$.

Dann alle diese Ausdrücke heißen 6.

§. 22. Jede Aequation hat zween Theile, oder Glieder: also wird in dieser Aequation ($a+b=2x$) $a+b$ das erste, $2x$ aber das zweyte Glied der Aequation genennt.

§. 23. Eine Aequation **vom ersten Grade** ists, wenn die unbekannte Grösse zu keiner Dignität erhoben. **Vom zweyten Grade**, wenn die unbekannte Grösse ein **Quadrat**, oder zum zweyten Grade erhoben ist. Ist sie ein **Cubus**, oder zum **dritten Grade** erhoben, wird die Aequation, in der sie vorkömmt, **vom dritten Grade** seyn, und so fort.

§. 24. Eine Aufgabe allgebraisch auflösen heisset eigentlich nichts anders, als den Werth aller unbekannten Grössen finden, die in der Aufgabe vorkamen: oder erweisen, daß die Bedingnisse der Aufgabe einen Widerspruch enthalten, und also unmöglich seyn.

§. 25. Der Werth der unbekannten Grössen aber kann nur durch die Reduction gefunden werden.

§. 26. Diese Reduction nun wird jederzeit aus den ersten unerweislichen Grundsätzen hergenommen, von deren Wahrheit uns das Licht der Natur überzeuget. Man reducirt also die Aequationen durch eine oder mehr aus folgenden arithmetischen Operationen.

1. Durch die Addition; dann, wenn man zu gleichen Grössen gleiche addirt, werden die Summen gleich seyn.

2. Durch die Subtraction; denn, wenn man von gleichen Grössen gleiche abziehet, werden die Reste gleich seyn.

3. Durch die Multiplication; denn, wenn man gleiche Grössen mit gleichen, oder mit der nämlichen dritten multiplicirt, werden die Producte gleich seyn.

4. Durch die Division; denn, wenn man gleiche Grössen durch gleiche, oder durch die nämliche dritte dividirt, werden die Quotienten gleich seyn.

5. Durch Erhebung beyder Glieder der Aequation zum nämlichen Grade der Dignität; dann

gleiche

gleiche Wurzeln haben gleiche Dignitäten vom nämlichen Grade.

6. Durch Ausziehung der Wurzel des nämlichen Grades aus beyden Gliedern.

§. 27. Man fährt aber mit der Reduction so lange fort, bis alle bekannten Grössen auf einer, und *eine einzige unbekannte* Grösse auf der andern Seite der Aequation zu stehen kömmt. Aber eben dieß erhält man, wenn man die *addirten* Grössen *subtrahiret*, und die *Subtrahirten addirt*: die *Multiplicirten dividirt*, und die *Dividirten multiplicirt*, aus den gleichen *Dignitäten* endlich gleiche *Wurzeln* auszieht. ꝛc.

§. 28. Es sind also die Operationen, die in der Reduction einer Gleichung vorkommen können, folgende. 1 Die *Addition*. 2 Die *Subtraction* (welche beyde die *Transposition* ausmachen) 3 Die *Multiplication*. 4 Die *Division*. 5 Die *Ausziehung* der *Wurzeln*. 6 Die *Substitution*. Nun wollen wir kurz von jeder in Sonderheit handeln.

VI. Abschnitt.

Von den Regeln der Reduction.

§. 29. I. Regel. Wenn in der Gleichung nur eine einzige unbekannte Grösse vorhanden ist, so ist sie entweder zu den bekannten Grössen addirt, oder davon subtrahirt. Und in diesem Falle bedient man sich der Transposition, wie in dieser Aequation $a + x - m = d$.

Findet sich die unbekannte Grösse in einer Fraction mit anderen bekannten Grössen, muß die Fraction durch die Multiplication gehoben werden. Wie

$$\frac{ax}{b} = c\,d. \qquad \text{oder} \qquad \frac{a+b}{x} = c.$$

Ist aber die unbekannte Grösse mit einer oder mehr bekannten multiplicirt, so bedienet man sich der Division, wie in dieser Gleichung: $ax + bx = cd$,

Ist endlich die unbekannte Grösse zu einer Dignität erhoben, wie $ax - x^2 = c$, muß man beyderseits die Wurzel ausziehen.

§. 30.

§. 30. Wenn mehr unbekannte Grössen vorhanden, sind auch mehr Aequationen nöthig, in welchen diese unbekannten Grössen vorkommen. Z. B. es kommen in der nämlichen Aufgabe diese zwo Aequationen vor, $x+y=a$ und $y-x=b$, so muß man, um die einte unbekannte Grösse wegzubringen, sich der *Substitution* bedienen.

§. 31. Um die Gleichheit beyder Glieder zu erhalten, muß man jederzeit die *nämliche Operation*, die man im *ersten Gliede* der Aequation vorgenommen, gleich auch im *zweyten* vornehmen.

§. 32. Durch die *Transposition* kann man jede Grösse von einem Gliede in daß andere hinüber bringen, ohne die Gleichheit aufzuheben, wenn man sie in einem Gliede auslöscht, oder wegläßt, im anderen aber mit verändertem Zeichen + in — oder — in + hinsetzet.

Z. B. In dieser Aequation $ac+x=b$, damit die unbekannte Grösse x allein im ersten Gliede stehen bleibe, darf man nur ac in das zweyte Glied mit dem Zeichen — übersetzen, so wird $x=b-ac$ seyn.

§. 33. So oft in einer Gleichung eine *Fraction* enthalten, muß diese vor allen durch die *Multipli-*

tiplication aufgehoben werden. Man muß nämlich durch den Nänner der Fraction (oder, wenn deren mehr sind, durch das Product aus allen Nennern) alle Theile der ganzen Aequation multipliciren.

§. 34. Hier hat sich der Anfänger zu erinnern, daß, wenn wir eine Fraction (z. B. $\frac{3}{5}$.) durch ihren Nenner (5) multipliciren, das Product jederzeit ihr Zähler (3) sey. Denn wenn wir $\frac{3}{5}$ durch 5 multipliciren, kömmt $\frac{15}{5}$ heraus. Es ist aber $\frac{15}{5} = 3$. So auch $\frac{x}{b} \times b = \frac{bx}{b} = x$. Dahero wird diese Aequation $\frac{a}{x} + \frac{x}{b} = abc - bcd$, wenn man sie reducirt, so aussehen $\frac{abx}{x} + \frac{bxx}{b} = abbcx - bbcdx$, das ist $ab + xx = abbcx - bbcdx$.

§. 35. Wenn eine unbekannte Grösse mit einer oder mehr andern bekannten *multiplicirt* ist, muß sie durch die Division davon getrennt werden.

Hier muß der Anfänger den Lehrsatz ja nicht vergessen, den wir §. 9. vorausgeschickt: er wird ihm in diesem Falle gute Dienste thun.

Ich

Ich soll z. B. in der Aequation $bx - ac = bd - cd$ die unbekannte Grösse x von der bekannten Grösse b losmachen, wodurch sie multiplicirt ist; so dividire ich alle Theile der Aequation durch b,

$$\frac{bx}{b} - \frac{ac}{b} = \frac{bd}{b} - \frac{cd}{b}$$

Das ist $x - \frac{ac}{b} = d - \frac{cd}{b}$

Wenn wir nun transponiren, wird endlich

$$x = d + \frac{ac}{b} - \frac{cd}{b}$$ seyn.

§. 36. Hier muß der Anfänger gleichwohl durch beständige Ubung die Kunst erlernen, die Factoren oder Efficienten eines jeden Products zu finden, wozu ihm folgende zwo anmerkungen treflich dienen werden.

§. 37. I. Anmerk. Wenn der nämliche Buchstabe in einer zusammgesetzten Grösse durch mehr andere multiplicirt ist, machet er mit der Summe aller dieser nur ein einziges Product aus.

Z. E. $ax - bx + 3x$ ist ein einziges Product, wovon der einte Factor x, der andere $a - b + 3$ heißet.

Da-

Dahero, wenn ich in der Aequation $ax - bx + 3x = d$ die unbekannte Grösse x von den bekannten losmachen will, darf ich nur beyderseits durch $a - b + 3$ dividiren, so wird $\frac{ax - bx + 3x}{a - b + 3} = \frac{d}{a - b + 3}$

das ist $x = \frac{d}{a - b + 3}$ seyn.

Eben so ist auch $nx - x$ ein einziges Product, wovon der einte Factor x, der andere $n - 1$ heißt. Folglich in der Aequation $nx - x = m$,

wird $x = \frac{m}{n - 1}$ seyn.

§. 38. II. Anmerk. Wenn in gar jedem Theile der gegebnen Aequation der nämliche Buchstabe vorkömmt, muß man alle Theile damit dividiren, so wird die Aequation kürzer, und eben darum leichter zu reduciren seyn.

Es wird also z. B. die Gleichung $abb - bxx = bd$ in diese veränderet $\frac{abb}{b} - \frac{bxx}{b} = \frac{bd}{b}$, das ist $ab - xx = d$. Folgende aber $aac - aa = aabd$, wenn ich durch aa dividire, wird in diese verwandelt $c - 1 = bd$.

§. 39. Wenn in einer Aufgabe mehr, als eine unbekannte Grösse, vorkommen, muß man alle übrigen, bis auf eine, nach und nach aus der Aequation fortbringen. Dieß läßt sich nicht anderst, als durch die Substitution thun.

§. 40. Um zu begreifen, daß durch die Substitution die Gleichheit der Aequation nicht gehoben werde, dörfen wir nur zween Grundsätze zu Hilfe nehmen.

I. Wenn zwo Grössen a und b einer dritten c gleich sind, sind auch a und b einander gleich.

II. Ich kann also b anstatt c setzen, ohne die Gleichheit aufzuheben: und dieß heißt Substituiren.

Beyspiel. Es seye $ax + y = b$ und $x + by = a$
so ist $y = b - ax$.

Nun kann ich in der 2ten Aequation $x + by = a$ anstatt y das gefundne $b - ax$, welches dem y gleich ist, hinsetzen. Es ist aber in dieser zweyten Aequation die Grösse y multiplicirt durch b, so muß ich dann auch $b - ax$ durch b multipliciren, damit das Product dem by gleich werde. Wir bekommen also statt $x + by = a$ diese Aequation, $x + bb - abx = a$, aus welcher die unbekannte Grösse y schon fortgeschaft ist.

Wir hätten die Quantität x eben so leicht wegbringen können, wenn wir die erste Aequation auf x reducirt hätten, so: $ax + y = b$

folglich $ax = b - y$

und endlich $x = \frac{b-y}{a}$ wenn wir nun in der zweyten Aequation für x dieß gefundne $\frac{b-y}{a}$ substituiren, wird sie so aussehen:

$\frac{b-y}{a} + by = a$ in welcher kein x mehr vorhanden.

§. 41. Eben so verfährt man, wenn drey, oder mehr unbekannte Grössen in einer Gleichung vorkommen.

VII. Abschnitt.

Von Ausziehung der Wurzeln aus den Aequationen des zweyten Grades.

§. 42. Wenn in einer Aequation die unbekannte Grösse zur zweyten Dignität erhoben, oder ein Quadrat ist, muß man folgende vier Regeln beobachten.

§. 43.

§. 43. I. Regel. Wenn die unbekannte Grösse mit einer anderen bekannten multiplicirt, muß sie durch die Division, ist sie aber durch eine andere dividirt, oder ist sie der Divisor einer andern, muß sie durch die Multiplication davon losgemacht werden. (§. 29.)

§. 44. II. Regel. Wenn das Quadrat der unbekannten Grösse das Zeichen — vor sich hat, muß man es auf die andre Seite transponiren, und das Zeichen + voraus setzen; denn kein wahres Quadrat kann das Zeichen — vor sich haben. Es hat demnach $-x^2$, weder $+x$ weder $-x$ für seine Wurzel; weil ein jedes Quadrat ein Product seyn muß aus der nämlichen Grösse, die ich mit sich selbst multiplicire. Es ist aber $x \times x = x^2$ und $-x \times -x$ auch $= x^2$. Folglich ist $-x^2$ kein Quadrat.

§. 45. III. Regel. Alle Theile der Aequation, in welchen sich die unbekannte Grösse befindet, müssen zuerst auf eine Seite, die übrigen Theile aber auf die andre durch die Transposition gebracht werden.

§. 46. IV. Regel. Wenn nun das Glied der Aequation, wo sich die unbekannte Grösse be-

findet, ein wahres Quadrat ausmacht, das ist, wenn in diesem Glied das Quadrat der unbekannten Grösse ganz allein stehet, wie in dieser Aequation $x^2 = a - b$ 2c. kann die Wurzel ohneweiters ausgezogen werden, und wird

$$x = \sqrt{a - b} \text{ seyn.}$$

Befinden sich aber in diesem Gliede der Aequation noch andre Producte aus bekannten Grössen, die mit der Unbekannten multiplicirt sind, wie z. B. in dieser Aequation $x^2 - 2\,a\,x = b$, so ist das erste Glied der Aequation ein incompletes Quadrat, und muß complirt werden.

§. 47. Aufgabe. *Ein Quadrat compliren, damit man die Wurzel ausziehen könne.*

Aufl. Quadrire die Hälfte der bekannten Grösse, womit die Unbekannte multiplicirt ist, und addire dieß Quadrat zu beyden Gliedern, so ists geschehen.

Beysp. Es sey $x^2 - a\,x = 2\,d$

Nimm die Hälfte von $a = \frac{a}{2}$

Diese quadrire $= \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$.

Dieß

Dieß gefundne Quadrat $\frac{a^2}{4}$ addire zu beyden Gliedern der vorigen Aequation, so bekömmst du $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = 2d + \frac{a^2}{4}$ ein vollkommnes Quadrat.

VIII. Abschnitt.

Uebungen, in etwelchen leichtern Aufgaben vom ersten Grade, in denen nur ein einzige unbekannte Grösse vorkömmt.

§. 48. I. Aufgabe. Aus der gegebnen Summe zwoer Grössen oder Zahlen, und ihrer Differenz die Zahlen selber finden.

Aufl. Man nenne die Summe a
die Differenz b
die kleinere Zahl x

So wird die Grössere $x + b$ heißen.

Wenn ich nun die kleinere Zahl x, und die grössere $x + b$ zusammen addire, bekomme ich die Summe a. Mithin ist $2x + b = a$. Reducire ich diese

Aequation, erhalte ich $2x = a - b$. Und endlich

$$x = \frac{a-b}{2}.$$

§. 49. Diese letztere Aequation $x = \frac{a-b}{2}$ wird eine algebraische Formel genennt, weil sie mir eine allgemeine Regel an die Hande giebt, tausend, und mehr Aufgaben, deren Bedingnisse in das nämliche Fache gehören, ohne weiters aufzulösen. Die Regel heißet so: Subtrahire von der gegebnen Summe a die Differenz b, und den Rest theile durch 2, so hast du jederzeit die kleinere aus den zwoen Zahlen.

Man sieht von sich selber, daß, um die größere Zahl zu bekommen, man nur die Differenz zur gefundnen kleinern addiren dörfe.

§. 50. Jetzt wird es nicht mehr schwer seyn, folgende Aufgabe aufzulösen.

Aufgabe. Die Belagerung einer Stadt hat zween Tage gedauert, und sind in allen 1730 Bomben hineingeworfen worden: Doch warf man den zweyten Tag um 74 Bomben mehr, als den ersten hinein. Nun fragt sich, wie viel sind den ersten, wie viel den andern Tage hineingeworfen worden?

Hier ist die Summe der Bomben unser $a = 1730$ der Ueberschuß des zweyten Tages die Differenz $b = 74$.

Aufl.

Aufl. Nun dörfen wir nur unsre vorige Formel $x = \frac{a-b}{2}$ hernehmen, und für die Buchstaben die gegebnen Zahlen setzen $\frac{1730-74}{2} = \frac{1656}{2} =$ 828 die Zahl der Bomben des ersten Tags. Setzen wir nun die Differenz 74 dazu, haben wir $828+74 = 902$ die Zahl des zweyten. Und so dienet uns die nämliche Formel für unzahlbare Aufgaben von dieser Gattung, was wir immer für Zahlen für die Summe a und für die Differenz b annehmen wollen.

§. 51. II. Aufgabe. **Ein Herr Officir hat die Hälfte ($\frac{1}{2}$) und drey Achttheile ($\frac{3}{8}$) von seinem monatlichen Solde verspielt: er bringt nur 15 fl. nach Hause. Frage: wie viel hat er monatlich zur Gage?**

Auflös. Seine uns unbekannte Gage nennen wir x, so ist, wie die Aufgabe sagt, $x - \frac{x}{2} - \frac{3x}{8} = 15$. Das ist, wenn wir die Fractionen unter einen Nenner bringen, $x - \frac{7x}{8} = 15$

Nun heben wir die Fraction auf, und multipliciren alles mit 8, so kömmt heraus $8\,x - 7\,x = 15 \times 8$

Das ist $x = 120$

die monatliche Gage des Hrn. Officirs.

§. 52. III. Aufgabe. Ein Minirhauptmann läßt in drey Monathen 4000 Klafter Minengallerien machen. Im zweyten Monathe werden seine Minirer verstärkt, und machen nochmal so viel, als im ersten Monathe, und noch 70 Klafter darüber. Im dritten Monathe wird ein Theil seiner Leute krank, und die übrigen machen um 100 Klafter weniger, als im zweyten Monathe gemacht worden. Nun fragt sich, wie viel Klafter im jeden Monathe die Arbeiter gemacht?

Auflös. Es sey $4000 = a$

$70 = b$

$100 = c$

Die Klafter des ersten Monaths $= x$

So sind die Klafter des zweyten $= 2\,x + b$

des dritten $= 2\,x + b - c$

Nun

Nun haben wir die Aequation, wenn wir nämlich alle drey addiren $5x + 2b - c = a$

Dahero $5x = a + c - 2b$

Und endlich $x = \frac{a + c - 2b}{5}$

Wenn wir nun am Platze der Buchstaben die oben bestimmte Zahlen setzen, haben wir

$$x = \frac{a + c - 2b}{5} = \frac{4000 + 100 - 140}{5} = \frac{3960}{5} = 792$$

Es sind demnach die Klafter

des ersten Monaths	$= x$	$=$	792
des zweyten Monaths	$= 2x + b$	$=$	1654
des dritten Monaths	$= 2x + b - c$	$=$	1554
Deren Summe	$= a$	$=$	4000

Etwelche Aufgaben, in welchen mehr unbekannte Grössen vorkommen.

§. 53. Nehmen wir die erste Aufgabe (§. 48.) wieder vor uns, damit man sehe, wie die nämliche Aufgabe auf vielerley Art könne aufgelöset werden.

I. Augabe. Aus der gegebnen Summe zwoer Grössen, und ihrer Differenz die Grössen selber finden.

Aufl. Es sey die Summe $= a$ die Kleinere $= x$
Die Differenz $= b$ die Grössere $= y$

So haben wir I. $x + y = a$ II. $y - x = b$
Dahero $y = a - x$ und $y = b + x$

So ist, wenn wir für y das zweyte Glied der ersten Gleichung in der zweyten Gleichung substituiren,

$$a - x = b + x$$

folglich $a - b = 2x$

Und endlich $\frac{a - b}{2} = x$ welches die kleinere Quantität ist.

Wir können aber, wenn wir wollen, auch die Grössere gleich anfangs finden, wenn wir in den ersten zwoen Aequationen statt y das x suchen, und so arbeiten:

$x + y = a$ und $y - x = b$
$x = a - y$ $x = y - b$

Dahero $a - y = y - b$

Folglich ist $\frac{a + b}{2} = y$

§. 54. II. Aufgabe. **Es halten die Caliber einer ganzen Carthaune, einer halben Carthaune, und eines Regimentstuckes 84 Centner am Gewichte. Der Caliber der ganzen Carthaune aber**

hält

hält zweymal so viel, als der Caliber der halben, und achtzehnmal so viel, als der Caliber des Regimentstuckes. Wie viel hält der Caliber eines jeden in Sonderheit?

Aufl. Es sey der Caliber des Regimentstuckes $= x$
der halben Carthaune $= y$
der ganzen $= z$

So sagt mir die Aufgabe, es sey I. $z = 2y$. II. $z = 18x$

Dahero $2y = 18x$

und $y = 9x$

Es ist aber $x + y + z = 84$.

Wenn wir nun in dieser Aequation $9x$ für y, und $18x$ für z substituiren, bekommen wir folgende Aequation: $x + 9x + 18x = 84$

Das ist: $28x = 84$

Dahero $x = \frac{84}{28} = 3$

Folglich hält der Caliber

des Regimentstuckes	$x = 3$	Centner.
der halben Carthaune	$y = 9x = 27$.	
der ganzen	$z = 18x = 54$.	

§. 55. III. Aufgabe. Ein Kaufmann soll einen Wechselbrief von 1768 fl. theils mit Ducaten

à 5 fl., theils mit Carolinen à 11 fl. bezahlen, ohne eine andre Geldsorte beyzulegen. Er bezahlt ihn, und giebt 200 Stücke. **Wie viel hatte er Ducaten, wie viel Carolinen hierzu nöthig?**

Aufl. Es sey die Zahl der Ducaten $= x$

der Carolinen $= y$

die Summe 1768 $= a$

200 $= b$

So ist $x + y = b$ folglich $x = b - y$

Und $5x + 11y = a$ und $x = \frac{a - 11y}{5}$

Dahero $b - y = \frac{a - 11y}{5}$

Heben wir nun die Fraction auf, und multipliciren mit 5, so ist $5b - 5y = a - 11y$

Addiren wir beyderseits $11y$,

so haben wir $5b + 6y = a$

Und $6y = a - 5b$

Endlich $y = \frac{a - 5b}{6}$

Setzen wir nun in dem zweyten Gliede der letzten Aequation für die Buchstaben die Zahlen hin, so bekommen wir $\frac{a - 5b}{6} = \frac{1768\text{-}1000}{6} = \frac{768}{6} = 128 = y$

Es

Es ist folglich die Zahl der Carolinen $y = 128$. Diese von 200 abgezogen, giebt die Zahl der Ducaten $x = 72$.

Anmerkung. Hätten wir anfänglich die Zahl der Ducaten x, und die Zahl der Carolinen $200 - x$ genennt, würden wir die Aufgabe eben so leicht mit einer einzigen Aequation haben auflösen können.

Etwelche Aufgaben vom zweyten Grade.

§. 56. I. Aufgabe. Ein junger Artillerist, der in der Algebra schon so etwas gethan, fragt, wie viel Caliber lang eine ganze Carthaune, und wie viel eine halbe Schlange seyn solle. Sein Lehrmeister sagt ihm: **Die halbe Schlange muß noch so lang, als die Carthaune seyn: Wenn man aber die Länge eines jeden Stuckes in Sonderheit quadrirt, muß die Summe der Quadraten 1620 Caliber machen.** Er soll nun mit seiner Allgebra die Länge selber finden.

Aufl. Es sey die Länge der Carthaune $= x$

So ist die Länge der halben Schlange $= 2x$

Nun sagt die Aufgabe, es sey $x^2 + 4x^2 = 1620 = a$

Das ist $5x^2 = a$

So ist $x^2 \quad \frac{a}{5}$

Und endlich $x = \sqrt{\frac{a}{5}} = \sqrt{\frac{1620}{5}} = \sqrt{324} = 18$

So

So muß dann die Carthaune $x = 18$ [Caliber lan-
Die halbe Schlange $2\,x = 36$ [ge seyn.

§. 57. II. Aufgabe. Er fragt noch einmal, wie schwer eine Kugel für eine halbe Schlange, und wie schwer sie für ein Regimentsstuck seyn müße, Der Lehrmeister antwortet: **Wenn ihr das Gewicht der Regimentsstuckkugel abzieht vom Gewichte der Schlangenkugel, bekommt ihr 6 tt. Wenn ihr sie aber durcheinander multiplicirt, wird das Product 27 tt. machen.** Er soll die Schwere einer jeden Kugel finden.

Auflös. Es sey das Product $27 = a$
Die Differenz $6 = d$
Das Gewicht der Schlangenkugel $= x$
der Regimentsstuckkugel $= y$

So ist, wie die Aufgabe will, $x - y = d$, und $xy = a$

Dahero $x = d + y$, und $x = \frac{a}{y}$

Nun haben wir die Aequation $d + y = \frac{a}{y}$

Und, heben wir die Fraction auf, $y^2 + dy = a$

Jetzt

Jetzt compliren wir das Quadrat, das ist, wir addiren beyderseits $\frac{d^2}{4}$, so ist $y^2 + d, y + \frac{d^2}{4} = a + \frac{d^2}{4}$

Und, wenn wir die Wurzel ausziehen, ist

$$y + \frac{d}{2} = \sqrt{a + \frac{d^2}{4}}$$

Dahero endlich $y = \sqrt{a + \frac{d^2}{4}} - \frac{d}{2}$

Substituiren wir nun im zweyten Gliede zahlen für die Buchstaben, kömmt heraus

$$\sqrt{a + \frac{d^2}{4}} = \sqrt{27 + \frac{36}{4}} = \sqrt{36} = 6 - \frac{d}{2} = 6 - 3 = 3$$

Ist also die Regimensstuckkugel $y = 3$ tt.
Die halbe Schlangenkugel $d + y = 9$ tt.

§. 58. III. Aufgabe. Eine Schildwacht ward gefragt, wie lang sie heute Nacht wachtgestanden, sie antworter: Ich weiß es selber nicht, nur das weiß ich, daß ich 2 Stunden länger wachtgestanden, als geschlafen habe, und wenn man die Stunden meines Schlafs durch die Stunden meiner Wache multiplicirt, bekömmt man fürs Producte 24.

Aufl.

Aufl. Es seyn die Stunden der Wacht $= x$
So sind die Stunden des Schlafes $= x - 2$
$24 = a$

Nun ist $x^2 - 2x = a$ wie die Aufgabe sagt.

Dahero $x^2 - 2x + 1 = a + 1$

Folglich $x - 1 = \sqrt{a + 1}$

Endlich $x = \sqrt{a + 1} + 1$
$= \sqrt{25} + 1 = 6.$

Er hat also 6 Stunden wachtgestanden, und 4 geschlafen.

IX. Abschnitt.

Von den arithmetisch- und geometrischen Verhältnissen, Proportionen, und Progreßionen.

Vorläufige Erklärungen.

§. 59. Ein Verhältniß ist eine Vergleichung zwoer Grössen miteinander, z. B. Zwoer Linien, oder zwoer Zahlen ꝛc.

§. 60. Die Grössen, die man miteinander vergleicht, heißen Glieder des Verhältnisses (*termini rationis*).

rationis). Das erste davon wird jederzeit der Antecedent, das zweyte der Consequent genennt.

§. 61. Wenn ich z. B. eine Linie von 3 Schuhen mit einer Linie von 9 Schuhen vergleiche, kann ich fragen, um wie viel die Linie von 9 Schuhen größer sey, als die von 3, und dieß werde ich innen, wenn ich die Kleinere von der Größeren abziehe, nämlich 9 -- 3 = 6. Dieses nun wird ein arithmetisches Verhältniß genennet, welches eine Vergleichung zwoer Größen durch die Subtraction ist, und in der Differenz bestehet.

Oder ich kann fragen, wie oft die kleinere Linie in der Größeren enthalten sey, welches mir die Division zeigt, nämlich $\frac{9}{3} = 3$, und dieß heißt ein geometrisches Verhältniß, welches in dem Quotienten bestehet, den ich erhalte, wenn ich ein Glied durch das andere dividire.

§. 62. Gleiche arithmetische Verhältniße sind, welche gleiche Differenzen haben. So ist 7 . 2 . = 9 . 4. das ist 7 verhält sich zu 2, wie 9 zu 4, denn es ist 7 — 2 = 5 und 9 — 4 auch = 5.

§. 63. Wenn vier Größen so in der Ordnung stehen, daß sich die Erste zur Zweyten, wie die Dritte zur Vierten verhält, machen sie eine Proportion aus: eine Arithmetische, wenn die Verhältniße arithmetisch, eine Geometrische aber, wenn diese geometrisch sind.

Z. B. Die Zahlen 7, 3, 9, 5 stellen eine arithmetische Proportion vor, die wir so schreiben: 7 . 3 = 9 . 5 . oder 7 — 3 = 9 — 5. Diese Zahlen aber 2, 8, 3, 12. machen eine geometrische Proportion aus, die wir so schreiben, 2 : 8 = 3 : 12.

§. 64. Das erste und letzte Glied einer jeden Proportion werden die (*extrema*) oder äußersten, das zweyte und dritte (*media*) oder die Mittlern genennt.

§. 65. Wenn sich das erste Glied zum zweyten, wie das Zweyte zum dritten verhält, wird es (*Proportio continua*) ein ununterbrochene Proportion genennt. In dieser ist jederzeit das nämliche zweyte Glied zugleich der Consequent des ersten, und der Antecedent des zweyten Verhältnißes.

Eine solche geometrische Proportion ist diese: $\overset{a}{2} . \overset{b}{4} . \overset{c}{8}$ Sie wird so vorgestellt ∺ $\overset{a}{2} . \overset{b}{4} . \overset{c}{8}$,

und

und heißet eben so viel, als $\overset{a}{2} : \overset{b}{4} = \overset{b}{4} : \overset{c}{8}$. Eine Arithmetische ist diese: $\overset{a}{1}, \overset{b}{2}, \overset{c}{3}$. Sie wird so vorgestellt, $\div \underset{1}{a} . \underset{2}{b} . \underset{3}{c}$ das ist: $\underset{1}{a} . \underset{2}{b} = \underset{2}{b} . \underset{3}{c}$.

§. 66. Wenn mehr, als zwo Verhältniße in einer ununterbrochenen Proportion aneinander stehen, nennen wir eine solche Reihe eine Progreßion.

Also ist eine arithmetische Progreßion

$\div 3 . 6 . 9 . 12 . 15$. rc.

Ein Geometrische diese

$\dot{\dot{\div}}\ 1 . 2 . 4 . 8 . 16$, rc.

§. 67. Das Verhältniß, wie die Progreßion, wächst, wenn der Antecedent kleiner ist, als der Consequent, sie nimmt ab, wenn jener größer ist.

So wächst diese arithmetische Progreßion

$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9$.

Diese aber nimmt ab

$\div 9 . 7 . 5 . 3 . 1$.

X. Abschnitt.

Lehrsätze, und Aufgaben von den arithmetischen Verhältnißen, Proportionen, und Progreßionen.

§. 68. I. Lehrsatz. Ein jedes arithmetisches Verhältniß kann durch eine aus folgenden Formeln ausgedrückt werden. $a . a \pm d$. oder $b . b \pm d$. oder $m . m \pm d$ 2c.

Das ist: der Consequent, oder das zweyte Glied eines jeden arithmetischen Verhältnißes ist gleich der Summe aus dem ersten Gliede a und der Differenz d, wenn das Verhältniß wächst. Nimmt es aber ab, ist das zweyte Glied gleich dem ersten a weniger der Differenz d.

Es sey z. B. $a = 3 . d = 2 . b = 5$. wir haben nun folgendes Verhältniß $a . b$. so heißet $a . b$ so viel als $3 . 5$. hiemit wird $a + d = 3 + 2 = 5$ seyn, folglich kann ich statt b, $a + d$ schreiben.

Ist aber $a = 5$ und $b = 3$, so wird $a - d = 3$ seyn, hiemit kann wieder für b substituirt werden $a - d$.

§. 69.

§. 69. II. **Lehrsatz.** Wenn vier Größen in einer arithmetischen Proportion stehen, ist die Summe der zwo Aeußern der Summe der zwo Mittlern gleich.

Beweis. Es sey eine arithmetische Proportion

$$a \,.\, b = c \,.\, d$$

So kann ich mich statt der Consequenten b und d, dem ersten Lehrsatze zufolge, der allgemeinen Formel bedienen, und schreiben $a \,.\, a+d = c \,.\, c+d$

Nun ist ja die Summe der Aeußeren $a+c+d$

Gleich der Summe der Mittlern $a+c+d$ w. z. e.

Hieraus folget, daß in einer *proportione continua* die Summe der zwo äußersten Glieder doppelt so groß sey, als das Mittlere. Z. B. $\div a \,.\, b \,.\, c$ so wird $a+c=2b$ seyn. Denn wenn wir uns wieder der allgemeinen Formel bedienen, schreiben wir die ununterbrochene Proportion $\div a \,.\, b \,.\, c \,.$ so an:

$$\div a \,.\, a+d \,.\, a+2d \,.$$

Folgl. ist die Sume der Aeußern $= 2a + 2d$

wovon das mittlere Glied $= a+d$ die Hälfte ist.

Aus diesem leztern Lehrsatze können wir leicht folgende Aufgabe auflösen.

§. 70. **Aufgabe.** In jeder arithmetischen Proportion aus drey gegebnen Größen die Vierte selber finden.

Auflösung. Die Größe, die wir suchen, nennen wir x.

Die drey Bekannten sollen a, b, c heißen.

Man soll den Ersten finden.

So ist $x \,.\, a = b \,.\, c$

folglich $x + c = a + b$

also $x = a + b - c$

Man soll den Zweyten finden.

So ist $a \,.\, x = b \,.\, c$

folglich $a + c = b + x$

also $x = a + c - b$

Den Dritten $a \,.\, b = x \,.\, c$

$a + c = b + x$

$x + a + c - b$

Den Vierten $a \,.\, b = c \,.\, x$

$a + x = b + c$

$x = b + c - a$

Wenn man nun für a, b, und c was immer für ganze, oder gebrochene Zahlen substituirt, wird sich die Vierte x allzeit in der letzten Aequation oder Formel geben.

§. 71. Aufgabe. Zwischen zwoen Größen a und b die mittlere arithmetische Proportinal-Größe finden.

Aufl.

Aufl. Die Aufgabe sagt uns, es sey in ununterbrochener Proportion $a \,.\, x = x \,.\, b$

daher $a + b = 2x$

also $x = \frac{a + b}{2}$

§. 72. III. **Lehrsatz.** Jede arithmetische Progreßion kann durch folgende allgemeine Formel ausgedrückt werden.

$\div\ a \,.\, a \pm d \,.\, a \pm 2d \,.\, a \pm 3d \,.\, a \pm 4d \,.\, a \pm 5d$ ꝛc.

Beweis. Eine arithmetische Progreßion ist eine Reihe der Glieder $a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f$ ꝛc. welche um die nämliche Differenz ab- oder zunehmen. Nennen wir nun diese Differenz d, so ist $b = a \pm d$. und weil zwischen b und c wieder die nämliche Differenz ist, so ist $c = b \pm d$. es ist aber $b = a \pm d$. folglich ist $b \pm d = a \pm d \pm d$. das ist $a \pm 2d$. und so weiter. Aus diesem Lehrsatze können wir folgende sehr nützliche Sätze ziehen.

§. 73. I. In einer jeden arithmetischen Progreßion a, b, c, d, e, f ꝛc. ist die Summe der beyden äußersten Glieder $a + f$ der Summe jeder zwey Glieder gleich, die von den Aeußersten gleichweit abstehen, und, wenn die Glieder an der Zahl ungleich sind, zweymal so groß, als das Mittlere.

Man drücke die Progreßion durch die allgemeine Formel aus $\overset{I}{a} . \overset{II}{a \pm d} . \overset{III}{a \pm 2d} . \overset{IV}{a \pm 3d} . \overset{V}{a \pm 4d}$ rc. so wird die Sume des I und V Gliedes $= 2a \pm 4d$ seyn. Es ist aber auch die Sume des II, u. IV $= 2a \pm 4d$. und jede aus diesen zwoen Summen ist zweymal so groß, als das mittlere oder III Glied $a \pm 2d$.

§. 74. II. Es ist demnach die Summe der ganzen arithmetischen Progreßion gleich dem Producte, welches entstehet, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes durch die halbe Zahl der Glieder multiplicirt.

Es sey die Summe $= S$. das erste Glied $= a$ das letzte $= \omega$ (omega) die Zahl der Glieder $= n$

So ist $S = (a + \omega) \frac{n}{2}$

Das ist $S = \frac{an + \omega n}{2}$.

Es sey nun z. B. $a = 3 . \omega = 9 . n = 7$.

So ist $\frac{an + \omega n}{2} = \frac{21 + 63}{2} = \frac{84}{2} = 42 = S$.

Die Progreßion ist also diese $\div$ 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. deren Summe 42. machet.

§. 75.

§. 75. III. In einer arithmethischen Progression ist also ein jedes Glied gleich der Summe aus dem ersten Gliede a, und aus dem Producte, welches entstehet, wenn ich die Zahl der Glieder weniger eins $(n-1)$ durch die Differenz d multiplicire. Folglich sieht die Formel eines jeden Gliedes so aus: $a + (n-1)\,d = a + dn - d$.

§. 76. Weil ein jedes Glied $= a + dn - d$, so wird eben darum auch das Letzte $\omega = a + dn - d$ seyn, welches nun die allgemeine Formel für das ω ist.

Es sey z. B. $a = 3 . d = 2 . n = 7$.

So ist $\omega = a + dn - d = 3 + 14 - 2 = 15$.

Die Progreßion ist diese: $\div 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 15$.

Nun wird es nicht mehr schwer seyn, allerhand aus der Arithmetick, aus der Geometrie, aus der Physick ꝛc. hergeholte Aufgaben durch bloße Anwendung unsrer Formeln auflösen. Ich will von jeder Gattung nur ein einziges Beyspiel hersetzen.

§. 77. Arithmetische Aufgabe. Man soll eine gegebne Zahl a in zween Theile theilen so, daß diese zween Theile oder gefundne Zahlen mit der gegebnen Zahl a in arithmetischer Proportion stehen, das ist, daß sich die kleinere zur größeren, wie die größere zur gegebnen Summe a verhalte.

Auflös. Es sey die kleinere Zahl $= x$

So wird die Größere $= a - x$ seyn.

Wir haben demnach diese Proportion

$$\div x \,.\, a - x \,.\, a$$

Folglich ist $x + a = 2a - 2x$

Und $3x = a$

Dahero $x = \frac{a}{3}$

Nun haben wir eine allgemeine Formel, die so heißet: wenn ich $\frac{1}{3}$ von was immer für einer Zahl abziehe, wird sich eben dieses Drittheil ($\frac{1}{3}$) zum Reste, wie der Rest zur gegebnen Zahl arithmethisch verhalten.

Es sey $a = 9$. so ist $\frac{a}{3} = 3$. folglich $\div 3 \,.\, 6 \,.\, 9$.

§. 78. Anmerkung. Aus der Erfahrung und genauesten Beobachtungen der Natursforscher wissen wir 1. daß ein Körper, wenn er von einer Höhe frey herabfällt, seine Geschwindigkeit immerzu vermehre. 2. Daß er in einer Secunde vom Anfange seines Falls einen Raum von 15 Schuhen hinter sich laße. 3. Daß er in der zweyten Secunde dreymal so viel, und in der dritten fünfmal so viel, als in der ersten, mache. Es wachsen demnach die Räume, wie die ungeraden Zahlen in arithmetischer Proportion 1. 3. 5. 7. 9. rc. Wenn wir also den ersten Raum a heißen, und der

Kör=

Körper $5''$ Secunden gebraucht, bis er von einer bestimmten Höhe auf die Erde gefallen, wird die Progreßion diese seyn. $\overset{1''}{a} . \overset{2''}{3a} . \overset{3''}{5a} . \overset{4''}{7a} . \overset{5''}{9a}$.

Weil nun der erste Raum in solchem Falle jederzeit $= 15$ ist $= a$, so wird der zweyte $= 3 . 15 = 45 = 3\,a$ seyn, und die Differenz $= 30$.

Jetzt können wir folgende physikalische Aufgabe auflösen.

§. 79. **Physikalische Aufgabe. Es geschieht aus einer auf einem hohen Berge gelegnen Vestung mit einem Mörser ein Horizontal oder Kernwurf. Außer der Vestung sieht man die Bombe auf die Erde fallen. Man soll wissen I. wie viel Schuhe hoh diese Bombe herab gefallen? II. wie viel Schuhe sie in jeder Secunde in Sonderheit sich der Erde genähert?**

Auflösung. 1. Man bediene sich hierzu einer Secundenuhr, oder, im Abgange derselben, eines Penduls, dessen Länge $= 3' . 8''$ französischen Maaßstabes sey.

2. So bald man das Feuer sieht, fängt man nach diesem Pendul die Secunden zu zählen an, bis die Bombe die Erde berührt. Z. B. man habe $5''$ Secun-

den

den gezählet. Hier hat man nun eine arithmetische Progreßion, in welcher uns bekannt

das erste Glied $a = 15$
die Differenz $d = 30$
die Zahl der Glieder $n = 5$

Nun können wir ja das letzte Glied ω, und aus diesem die Summe finden. Es ist aber

$$\omega = a + dn - d = 15 + 150 - 30 = 165 - 30 = 135.$$

weiters ist $S = \frac{an + \omega n}{2} = \frac{75 + 675}{2} = \frac{750}{2} = 375.$

Es ist also diese Bombe 375 Schuhe hoh herabgefallen, und der letzte Raum, den sie in der 5ten Secunde gemacht, ist 135 Schuhe.

Will ich nun wissen, wie viel sie in der dritten Secunde gemacht, so setze ich $n = 3$. und behalt meine vorige Formel

$$a + dn - d = 15 + 90 - 30 = 105 - 30 = 75.$$

Wäre diese Bombe 7'' Secunden lang gefallen, so wäre $n = 7$ und $a + dn - d = 15 + 210 - 30 = 225 - 30 = 195'$. hätte also die Bombe in der 7ten Secunde 195' gemacht.

Anmer-

Anmerkung. Wenn eine Bombe auf einer ebenen Fläche unter einen *Winkel* in die Höhe geworfen wird, und folglich eine ganze Parabel beschreibt, muß man, um ihre Höhe zu bestimmen, für n die Hälfte der Zeit annehmen, die sie vom Mörser aus, bis sie auf die Erde gefallen, angewendet. Z. B. Man habe vom Anfange des Wurfes $12''$ gezählt, bis sie auf die Erde gefallen, so wird $n = 6$ seyn, und hiemit $\omega = 165$. und S, oder die Höhe der Parabel 540 Schuhe: wozu die Höhe des Mörsers addirt wird.

§. 80. **Geometrische Aufgabe,** die nur eine Anwendung der vorigen ist. *Man soll die Höhe eines Thurmes, oder die Tiefe eines Brunnes durch den Fall eines Steines bestimmen.*

Auflösung. Man laße einen Stein von der Spitze des Thurmes, oder von der Mundung des Brunnes frey hinab fallen, und zähle, wie in der vorigen Aufgabe, vom Anfange des Falles die Secunden, bis der Stein die Erde, oder das Wasser im Brunne erreichet, deßen uns der Schall versichert. Wir haben z. B. $6''$ gezählt. So haben wir wieder eine arithmetische Progreßion, in welcher uns bekannt

das erste Glied $a = 15$
die Differenz $d = 30$
die Zahl der Glieder $n = 6$

Nun

Nun braucht es mehr nicht, als ω und S finden.

$$\omega = a + dn - d = 15 + 180 - 30 = 195 - 30 = 165.$$

$$S = \frac{an + \omega n}{2} = \frac{90 + 990}{2} = \frac{1080}{2} = 540$$ ist die gesuchte Höhe, oder Tiefe.

Anmerkung. Es ist zwar die in dieser und besonders in der vorigen Aufgabe angebrachte Art zu messen eben nicht so genau, theils wegen dem Widerstand der Luft, theils wegen der Propagation des Lichtes, und des Schalles, die eben nicht im Augenblicke, sondern nach und nach geschieht. Doch kann sie zuweilen dienen, im Falle, da man einen Fehler von ein oder anderen Schuhe in einer beträchtlichen Höhe nicht zu achten hat.

§. 81. Allgemeine Aufgabe für alle Fälle. Ein Deserteur wird aus einer Vestung flüchtig, und legt in seiner Flucht täglich 10 Meilen hinter sich. Man schickt ihm einen Soldaten aus der Besatzung nach; dieser macht den ersten Tage 3, den zweyten 5, den dritten Tage 7 Meilen, und so fort, täglich um zwo Meilen mehr, bis er ihn einholet. Nun fragt sich, den wievielten Tage wird er den Flüchtling einholen?

Hier haben wir in der arithmetischen Progresſion das erste Glied $a = 3$

Die Differenz $d = 2$

Wir suchen die Zahl der Glieder $n = x$.

Es ist also die Summe der Progreßion $S = x \times 10 = 10\,x$; denn die Zahl der Glieder ist hier die Zahl der Tage, davon der Deserteur am jeden 10 Meilen zurückleget.

Auflös. Es sey, Kürze halber, $10 = b$

So ist $S = b\,x$. Es ist aber $S = \frac{an + \omega n}{2}$

$= (a + \omega)\frac{n}{2}$. Und $\omega = a + dn - d$

Folglich ist $a + \omega = 2\,a + d\,n - d$.

Weil aber hier $n = x$

So ist $a + \omega = 2\,a + d\,x - d$

Dahero ist $S = (2\,a + d\,x - d)\frac{x}{2}$

Das ist $S = \frac{2\,ax + dx^2 - dx}{2} = ax + \frac{dx^2 - dx}{2}$

Es ist aber $S = b\,x$.

Folg=

Folglich ist $a\,x + \frac{dx^2 - dx}{2} = b\,x$.

Wenn wir nun alles durch x dividiren, bekommen wir

$$a + \frac{dx - d}{2} = b$$

Ist also $2a + dx - d = 2b$

Und $dx = 2b + d - 2a$

Endlich $x = \frac{2b + d - 2a}{d} = \frac{20+2-6}{2} = \frac{16}{2}$

$= 8 = n$. So wird er ihn den 8ten Tage einholen.

Die Reihe der Progreßion ist diese:

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17.

§. 82. Nehmen wir diese Aufgabe nochmal vor uns, und setzen, der Soldat, der dem Deserteur nachgeeilet, habe am ersten Tage 3, am Letzten 17 Meilen hinter sich gelegt, und den Deserteur am 8ten Tage eingeholet, der täglich 10 Meilen geloffen. Es fragt sich, wie viel Meilen der Soldat alle Tage habe laufen müßen?

Nun ist uns in dieser Progreßion bekannt $a = 3$

$\omega = 17$

$n = 8$

$S = 80$

Wir

Wir haben also nur die gemeine Differenz d zu suchen, um die ganze Progreßion zu bekommen.

Auflös. weil $\omega = a + dn - d$

So ist $\omega - a = dn - d$

Und folglich $\frac{\omega - a}{n - 1} = d = \frac{17 - 3}{8 - 1} = \frac{14}{7} = 2$

Da wir nun die Differenz gefunden $d = 2$, wird die Progreßion folgende seyn 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. welches die Meilen sind, die der Soldat täglich geloffen.

§. 83. Wir wollen die nämliche Aufgabe auch das drittemal vor uns nehmen, und setzen, der Soldat habe den Deserteur am 8ten Tage erwischt, nachdem er am ersten Tage 3 Meilen gelaufen, täglich aber um die nämliche Differenz mehr hinter sich gelegt, da indessen der Deserteur alle Tage seine 10 Meilen, und in allem 80 Meilen Weges gemacht.

In dieser Progreßion ist uns bekannt $a = 3$

$n = 8$

$S = 80$

Nun fragt sich, wie viel Meilen der Soldat am letzten Tage zurückgelegt. Wir müßen also das letzte Glied ω finden.

Aufl. $S = \frac{an + \omega n}{2}$ dahero $2S = an + \omega n$

Folglich ist $\frac{2S - an}{n} = \omega$

Das ist $\frac{160 - 24}{8} = \frac{136}{8} = 17$. Er hat also am 8ten Tage 17 Meilen gemacht

Tausend dergleichen Aufgaben werden wir ohne Mühe aufzulösen geschickt seyn, wenn wir uns nur die allgebraischen Formeln von den arithmetischen Progreßionen bekannt machen; wir wollen dahero von diesen noch einen kurzen Abschnitt hersetzen.

XI. Abschnitt.

Von den allgebraischen Formeln der arithmetischen Progreßionen.

Anmerkung.

§. 84. Aus dem, was wir bisher von den arithmetischen Progreßionen gelehrt, können wir 20 Formeln herausziehen. Von den 11 ersten ist der Beweis eben nicht schwer. Die 9 letz-

letzten zu erweisen kostet mehr, als daß man den Beweis davon von einem Anfänger erwarten sollte. Ich werde sie also zuletzt nur so ohne Beweise hinsetzen.

§. 85. Der Ausdruck der arithmetischen Progreßion zeiget uns deutlich genug, daß die Differenz zwischen dem ersten a und letzten Gliede ω jederzeit dem Producte gleich sey, welches entsteht, wenn wir die Zahl der Glieder weniger eins $(n - 1)$ durch die allgemeine Differenz (d) multipliciren, woraus folgende Aequation

$$\omega - a = dn - d$$

als der Grund vier anderer Formeln, die sich selbst durch die bloße algebraische Rechnung erweisen, entsteht. Denn weil $\omega - a = dn - d$

So ist I. $\omega = a + dn - d$

II. $a = \omega - dn + d$

III. $d = \dfrac{\omega - a}{n - 1}$

IV. $n = \dfrac{\omega - a + d}{d}$

§. 86. Aus dem §. 74. haben wir diese Aequation, und Formel von der Summe $S = \frac{an + \omega n}{2}$

Dahero $2S = an + \omega n$

Welches wieder eine Grundformel ist, aus welcher vier andere durch die allgebraische Rechnung gefunden werden. Hier ist sie:

Weil $2S = an + \omega n$

So ist I. $S = \frac{an + \omega n}{2}$

II. $a = \frac{2S}{n} - \omega$

III. $\omega = \frac{2S}{n} - a$

IV. $n = \frac{2S}{a + \omega}$

§. 87. Weil $2S = an + \omega n$

Und $\omega = a + dn - d$ (§. 85.) so wird, wenn wir substituiren, $2S = 2an + dn^2 - dn$ seyn: und dieß ist schon wieder eine Grundformel, von welcher vier andere durch die allgebraische Rechnung hergeleitet werden. Die Rechnung ist folgende:

Weil

Weil $2S = 2an + dn^2 - dn$,

So ist I. $S = \frac{2an + dn^2 - dn}{2}$.

II. $a = \frac{2S - dn^2 + dn}{2n}$

Aus der Grundformel $2S = 2an + dn^2 - dn$

Folgt $dn^2 = 2S - 2an + dn$

Dahero $dn^2 - dn = 2S - 2an$

Und endlich III. $d = \frac{2S - 2an}{n^2 - n}$

Dieß sind nun die 11 ersten Formeln, die für einen Anfänger noch ziemlich leicht haben können erwiesen werden, weil sie alle vom ersten Grade. Nun setze ich die übrigen neun ohne Beweise her.

IV. $n = d - 2a + \sqrt{\frac{8Sd + \overline{2a - d}^2}{2d}}$

Woven die Grundformel ist $dn^2 + 2an - dn = 2S$.

§. 88. Aus der Grundformel $2S = a + \omega + \frac{\omega^2 - a^2}{d}$ werden folgende vier Formeln gezogen:

$$\text{I. } a = \frac{d + \sqrt{\overline{2\omega + d}^2 - 8Sd}}{2}$$

$$\text{II. } \omega = -d + \sqrt{\overline{2a - d}^2 + 8Sd}$$

$$\text{III. } d = \frac{\omega^2 - a^2}{2S - a - \omega}$$

$$\text{IV. } S = \frac{ad + \omega d + \omega^2 - a^2}{2d} = \frac{(\omega + a)\overline{d + \omega - a}}{2d}$$

§. 89. Endlich aus der Grundformel

$$2S = 2\omega n - dn^2 + dn$$

haben wir folgende vier neue Formeln.

$$\text{I. } S = \frac{2\omega n - dn^2 + dn}{2}$$

$$\text{II. } \omega = \frac{2S + dn^2 - dn}{2n}$$

$$\text{III. } d = \frac{2\omega n - 2S}{n^2 - n}$$

$$\text{IV. } n = \frac{2\omega + d + \sqrt{-8Sd + \overline{2\omega + d}^2}}{2d}$$

An-

Anmerkung. Man wird sich nicht verwundern, daß ich mich in diesen Anfangsgründen etwas längers aufgehalten, wenn man nur bedenken will, daß es Anfangsgründe seyn, die für Anfänger gehören, für die man niemal deutlich genug schreiben kann, und die manchmal die dunkelsten Beschwerniße auch in deutlichsten Erklärungen finden. Jetzt wollen wir noch, so viel zu unserm Vorhaben nöthig, von den geometrischen Proportionen handeln.

XII. Abschnitt.

Von den geometrischen Verhältnißen, Proportionen, und Progreßionen.

Vorläufige Erklärungen.

§. 90. Der Quotient, den wir erhalten, wenn wir in einem geometrischen Verhältniße ein Glied durch das andere dividiren, wird der Exponent des Verhältnißes genennt.

§. 91. Wenn in zweyen geometrischen Verhältnißen zween gleiche Quotienten durch die nämliche Ordnung der Division erhalten werden, heißet man

die Verhältniße *rationes directas*. Die nämliche Ordnung der Division ists, wenn in beyden Verhältnißen das erste Glied der Divisor, und das zweyte der Dividendus ist: oder verkehrt: wenn in beyden das erste Glied der Dividendus, und das zweyte der Divisor ist.

§. 92. Im Gegentheile, wenn in einem Verhältniße das erste Glied dividirt durch das zweyte den Quotienten *m* giebt, und in dem andern Verhältniße eben dieser Quotient *m* erhalten wird, wenn ich das zweyte Glied durch das erste dividire, so ists nicht die nämliche Ordnung, und werden die Verhältniße auf Latein *rationes reciprocæ* genennt, oder *ratio inversa*, ein verkehrtes Verhältniß.

§. 93. Gleiche geometrische Verhältniße sind, welche gleiche Exponenten haben: und wenn zwey einem dritten gleich, sind sie auch untereinander gleich.

§. 94. Wir setzen hier zum voraus, daß der Quotient entstehe, wenn in dem geometrischen Verhältniße der Consequent durch seinen Anteeedenten dividirt wird.

Es kann demnach jedes geometrisches Verhältniß $a:b$ durch eine Fraction $\frac{b}{a}$ ausgedruckt werden. Da-

Dahero die Proportion $a : b = c : d$ auch so kann geschrieben werden $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.

XIII. Abschnitt.

Lehrsätze, und Aufgaben von den geometrischen Verhältnißen, Proportionen, und Progreßionen.

§. 95. I. Lehrsatz. Ein jedes geometrisches Verhältniß kann durch diese allgemeine Formel ausgedrückt werden $a : am$, oder $b : bm$ ꝛc.

Das ist: der Consequent eines jeden geometrischen Verhältnißes ist gleich dem Producte, welches entsteht, wenn ich den Antecedenten durch den Exponenten multiplicire.

Beweis. Den Exponenten erhalten wir, wenn wir den Consequenten durch seinen Antecedenten dividiren. Es ist also der Antecedent der Divisor, und der Consequent das Dividendum. Nun ist das Product, welches aus dem Divisor und Quotienten entstehet, jederzeit dem Dividendo gleich. Folglich ꝛc.

Es sey z. B. $a : b = m$, so wird $b = a\,m$ seyn.
$3 : 6 = 2 \qquad 6 = 2 \times 3$.

§. 96. Weil in einer geometrischen Proportion, die zwey Verhältniße, woraus sie bestehet, einander gleich sind, müßen sie beyde den nämlichen Exponenten haben; hiemit kann dieser beyderseits durch den nämlichen Buchstaben m ausgedrückt werden.

Wenn z. B. $a : b = c : d$
So ist $a : b = m$.
Und $c : d = m$.
Dahero $a : a\,m = c : c\,m$. nach der vorhergehenden allgemeinen Formel.

§. 97. II. **Lehrsatz.** In jeder geometrischen Proportion ist das Product der zwey äußersten Glieder dem Producte der zwey Mittlern gleich.

Beweis. Es sey $a : b = c : d$, so kann ich nach der allgemeinen Formel schreiben $a : a\,m = c : c\,m$.

Nun ist aber ja $a\,c\,m = a\,c\,m$, welches die zwey Producte sind.

§. 98. III. **Lehrsatz.** In jeder continuirten geometrischen Proportion, wo der Consequent des ersten Verhältnißes zugleich der Antecedent des zweyten ist, wird das Produet der zweyen äußern Glieder dem Quadrat des Mittlern gleich seyn.

Be=

Beweis. Es sey die continuirte Proportion $\div\!\!\div a \,.\, b \,.\, c \,.$ das ist $a : b = b : c$, so kann ichs durch die allgemeine Formel so ausdrücken $a : am = am : amm$.

Nun aber ist ja wiederum $a^2 m^2 = a^2 m^2$. w. z. e.

§. 99. **Aufgabe. Aus was immer für drey gegebnen Größen a, b, c einer geometrischen Proportion, die Vierte x finden.**

Auflösung.

Man soll die Erste finden.

So ist $x : a = b : c$

Also $xc = a\,b$ (§. 97.)

Und $x = \dfrac{a\,b}{c}$

Die Zweyte $a : x = b : c$

$bx = a\,c$

$x = \dfrac{a\,c}{b}$

Die Dritte $a : b = x : c$

$bx = ac$

$x = \dfrac{ac}{b}$

Die

Die Vierte $a : b = c : x$

$$ax = bc$$

$$x = \frac{bc}{a}$$

§. 100. Aufgabe. Zwischen zwo gegebnen Größen a und b die mittlere Proportionalgröße x finden. Die Proportion sey ∺ $a \,.\, x \,.\, b$.

Auflös. Weil ∺ $a \,.\, x \,.\, b$

So ist $ab = x^2$ (§. 98.)

Folglich $x = \sqrt{ab}$.

Anmerk. Wenn eine geometrische Proportion durch Fractionen ausgedrückt ist, bekömmt man das Product der äußern und mittlern, wenn man den Zähler der ersten Fraction durch den Nenner der zweyten, und den Nenner der ersten, durch den Zähler der zweyten multiplicirt.

So ist in der Proportion $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, $ad = bc$.

§. 101. IV. Lehrsatz. Im Gegenspiel, wenn aus vier gegebnen Größen a, b, c, d das Product der äußern ad = dem Producte der mittlern bc ist, werden diese vier Größen in geometrischer Proportion stehen:

Das ist, es wird $a : b = c : d$ seyn.

Be-

Beweis. Es sey der Exponent des ersten Verhältnißes $a : b = m$
des zweyten $c : d = p$, so können wir uns der allgemeinen Formel bedienen, und statt $a : b$, $a : am$ statt $c : d$, $c : cp$ schreiben. Es wird also $am = b$, $cp = d$ seyn. Weil nun $ad = bc$ so wird auch, wenn wir substituiren, $acp = amc$ seyn, und hiemit $m = p$. Folglich die Exponenten einander gleich, und die gegebnen Größen Proportional, w. z. e.

§. 102. Es kann also eine jede Aequation (weil ich ihre zwey Glieder jederzeit als zwey Producte ansehen kann, wovon eines aus den mittlern, das andere aus den äußern Gliedern der Proportion bestehet) in eine geometrische Proportion resolvirt, oder verändert werden.

Einige Beyspiele werden diesen Zusatz erklären.

I. Es sey $ad = bc$
So ist $a : b = c : d$.

II. Es sey $ad - bd = cg + c$
So ist $a - b : g + 1 = c : d$.

III. Es sey $1 - x^2 = a$
So ist $1 - x : a = 1 : 1 + x$.

IV. Es sey $x^2 - y^2 = 1$
So ist $x - y : 1 = 1 : x + y$.

V.

V. Es sey $x = \frac{ab}{c}$

So ist $x : \frac{a}{c} = b : 1.$

VI. Es sey $x = \frac{a-b}{c}$

So ist $cx = a - b$

Und folglich $c : a - b = 1 : x$

VII. Es sey $\omega = a + dn - d$

So ist $d : 1 = \omega : \frac{a}{d} + n - 1.$

VIII. Es sey $S = \frac{an + \omega n}{2}$

So ist $2 : a + \omega = n : S.$

IX. Es sey $dn^2 - dn = 2S - an$

So ist $n^2 - n : 2 = S - \frac{an}{2} : d$

X. Es sey $\omega = \frac{2S + dn^2 - dn}{2n}$

So ist $2n : 2 = S + \frac{dn^2 - dn}{2} \; \omega :$

XI.

XI. Es sey $S = \frac{ad+\omega d+\omega^2--a^2}{2d}$

So ist $2d : \omega+a = d+\omega--a : S$

XII. Es sey $a^{m+n} = x^3$

So ist $a^m : x = x^2 : a^n$

Der Beweis hievon giebt sich von sich selbst aus dem IV. Lehrsatze n. 101. weil in allen diesen 12 Proportionen jederzeit das Product der äußern Glieder dem Producte der zwey Mittlern gleich ist.

§. 103. V. Lehrsatz. Wenn 4 Größen in geometrischer Proportion stehen, haben foglende, und noch mehr dergleichen Veränderungen, oder Analogien Platz, wovon wir hier die lateinischen Namen Deutlichkeit, und Kürze halber beybehalten.

Es sey $a : b = c : d$ so können wir folgern.

1. *Commutando.* $c : d = a : b$
2. *Alternando.* $a : c = b : d$
3. *Invertendo.* $b : a = d : c$
4. *Iterum retro.* $d : c = b : a$
5. *Componendo.* $a+b : b = c+d : d$
6. *Seperando.* $a--b : b = c-d : d$
7. *Convertendo.* $a : a--b = c : c-d.$

8.

8. *Mixtim.* $a+b:a-b=c+d:c-d$
9. *Iterum.* $a+c:b+d=a:b$
10. *Iterum.* $a-c:b-d=a:b$. &c.

Anmerk. In den ersten vier Abänderungen der gegebnen Proportion sieht man von sich selbst, daß jederzeit das Product der äußersten Glieder dem Producte der mittlern gleich sey, und überall $ad=bc$ herauskomme. Um dieß auch in den 6 letztern wahrzunehmen, darf man nur in der Aequation statt ad das Product bc, oder statt diesem jenes substituiren.

§. 104. VI. Lehrsatz. Wenn zwo ungleiche Größen a und b durch die nämliche dritte d multiplicirt werden, verhalten sich die Producte wie die Größen selber gegeneinander.

Beweis. Ist kein andrer nöthig, als daß wir die Proportion hersetzen. $a:b=ad:bd$, denn wir sehen, daß $abd=abd$, und hiemit die Proportion richtig sey.

§. 105. VII. Lehrsatz. Wenn wir was immer für ein Product durch einen aus den Factoren dividiren, wird der Quotient jederzeit der andre Factor seyn.

Anmerkung. Ich habe diesen Lehrsatz schon oben (§. 9.) durch Beyspiele erkläret: aber erst jetzt kann ich den Beweis davon anbringen: hier ist er.

Be-

Beweis. Aus dem Begriffe, den wir von der Multiplication haben (wenn wir den Multiplicanten *m*, den Multiplicandum M, und das Product oder Factum F nennen) haben wir folgende Proportion:

$$1 : m = M : F.$$

Dahero $F = Mm$

Und also $\frac{F}{m} = M$

Und wieder $\frac{F}{M} = m.$ w. z. e.

§. 106. VIII. Lehrsatz. Zwo Fractionen, welche den nämlichen Zähler haben, verhalten sich gegeneinander *reciproce* wie ihre Nenner: *directe* wie ihre Zähler aber, wenn sie den nämlichen Nenner haben. (§. 92.)

Das ist, $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = c : b$ und $\frac{a}{d} : \frac{b}{d} = a : b$

Denn es ist $\frac{ab}{b} = \frac{ac}{c}$ und $\frac{ab}{d} = \frac{ab}{d}$.

§. 107. IX. Lehrsatz. Wenn man von zwoen Größen A und B zween ähnliche Theile *a* und *b*

Bayerische
Staatsbibliothek
München

abzieht, verhalten sich die Reste gegeneinander, wie die zwo Größen selber:

Das ist $A - a : B - b = A : B$.

Beweis. Weil ähnliche Theile diejenigen genennt werden, welche zu ihren ganzen gleiches Verhältniß haben, so ist $a : A = b : B$

Und folglich *altern.* $A : B = a : b$ (§. 103. *n.* 2.)

Dahero $Ab = aB$.

Wenn wir nun die vier Größen nach der Ordnung hersetzen $A - a, B - b, A, B$.

So müßen wir erweisen, daß

$AB - aB = AB - Ab$ sey.

Es ist aber $AB = AB$

Und $aB = AB$ aus dem vorigen,

Folglich $AB - aB = AB - Ab$.

Also ist $A - a : B - b = A : B$.

§. 108. X. **Lehrsatz.** Wenn sowohl die Antecedenten, als die Consequenten zwoer Proportionen durcheinander multiplicirt werden, machen die Producte wieder eine geometrische Proportion aus.

Es

Es seyn die gegebnen Proportionen $a : b = c : d$
und $p : q = r : s$

So müßen wir erweisen, daß $ap : bq = cr : ds$ sey.

Beweis. I. Weil $a : b = c : d$, so ist $ad = bc$

II. Weil $p : q = r : s$, so ist $ps = qr$.

Wenn ich nun gleiche Größen $a\,d$ und $b\,c$ wieder durch gleiche $p\,s$ und $q.r$ multiplicire, werden die Producte gleich seyn. Folglich $a\,d\,p\,s = b\,c\,q\,r$. w. z. e

§. 109. Hieraus folget, daß, wenn wir alle Glieder einer Proportion zur nämlichen Dignität erhöhen, diese Dignitäten wieder in Proportion stehen.

Dahero wenn $a : b = c : d$ ist,

So ist auch $a^m : b^m = c^m : d^m$

Eben dieß ists, wenn wir aus allen Gliedern der Proportion die Wurzel des nämlichen Grades ausziehen..

Dahero ist auch $\sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{b^m} = \sqrt[n]{c^m} : \sqrt[n]{d^m}$

Das ist $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}} = c^{\frac{m}{n}} : d^{\frac{m}{n}}$ (§. 16.)

§. 110. XI. Lehrsatz. Wenn mehr Glieder (so viel sie immer seyn mögen) miteinander in ei-

ner geometrischen Proportion stehen, wird sich die Summe aller Antecedenten zu der Summe aller Consequenten verhalten, wie ein jeder Antecedent in Sonderheit zu seinen Consequent.

Es sey $a:b=c:d=f:g$ ꝛc.

So wird $a+c+f:b+d+g=a:b=c:d$ ꝛc. seyn.

Beweis. Man drücke die Summe der Consequenten $b+d+g$ nach der allgemeinen Formel durch $am+cm+fm$ ꝛc. aus. So bekömmt man $a+c+f:am+cm+fm=a:am$.

In diesem Ausdruck ist das Product der zwey äußern Glieder, dem Producte der zwey Mittlern gleich: nämlich

$a^2m+acm+afm=a^2m+acm+afm$. dahero ꝛc.

§. 111. XII. Lehrsatz. Das Product zwoer Größen a und b ist jederzeit die mittlere Proportionalgröße zwischen den Quadraten der gegebnen Größen.

Das ist $a^2:ab=ab:b^2$.

Der Beweis ist schon fertig, wenn man nur Acht giebt, daß $a^2 b^2$ das Product der äußersten Glieder dem Producte der mittlern $a^2 b^2$ gleich, und hiemit die Proportion richtig sey.

§. 112.

§. 112. XIII. **Lehrsatz.** Wenn drey Größen *a*, *b*, *c* in einer continuirten Proportion stehen, verhält sich die erste *a* zur dritten *c*, wie das Quadrat der ersten, zum Quadrat der zweyten.

Es sey $a : b = b : c$

So wird $a : c = a^2 : b^2$ seyn.

Beweis. $a b^2 = a^2 c$

Denn es ist $a c = b^2$ aus der ersten gegebnen Proportion, so kann ich anstatt b^2, $a c$ substituiren; dahero

wird die Aequation $a b^2 = a^2 c$

in diese verändert $a a c = a a c$, hiemit ist in unsrer Proportion das Product der äußersten dem Producte der mittlern gleich, und die Proportion richtig. w. z. e.

§. 113. XIV. **Lehrsatz.** Wenn vier Größen *a*, *b*, *c*, *d*, in continuirter Proportion stehen, verhält sich die erste *a* zur vierten *d* wie der Cubus der ersten zum Cubus der zweyten:

Es sey $\div a, b, c, d.$

So wird $a : d = a^3 : b^3$ seyn.

Beweis. I. Weil $a : b = c : d$, so ist $a d = b c$

II. Weil $a : b = b : c$, so ist $a c = bb = b^2$

Macht man nun die Producte der äußern, und der mittlern in der obigen Proportion, bekömmt man $abbb$, und $daaa$, substituirt man jezt ac statt bb, und ad statt bc, wird $aabc = aabc$ seyn. w. z. e.

§. 114. Aufgabe. Man soll zwischen den gegebnen Größen a und d zwo mittlere Proportionalgrößen finden, x, y.

Aufl. Weil zwischen a und d zwo mittlere begehrt worden, so wird a der erste, uud d der vierte seyn.

Folglich ist $a : d = a^3 : x^3$. hiemit ist $x^3 = \frac{da^3}{a} = da^2$,

daher $x = \sqrt[3]{da^2} = b$ die zweyte Größe selbst.

Damit wir aber auch die andere mittlere Proportional y oder das dritte Glied finden, bedienen wir uns folgender Analogie:

$$a : b = b : y$$

Dahero $y = \frac{b^2}{a} = c.$

§. 115. Anmerkung. Wenn wir überhaupt in einer continuirten Progreßion das erste Glied a, das lezte ω, die Zahl der Glieder n und das zweyte Glied x nennen, ist jederzeit $a : \omega = a^{n-1} : x^{n-1}$

Wir

Wir haben also eine allgemeine Regel entdecket, zwischen zwoen gegebnen so viel mittlere Proportionalgrößen zu finden, als man gerne will.

§. 116. XV. **Lehrsatz.** Wenn vier, fünf oder mehr Glieder durch die nämlichen Buchstaben ausgedrückt werden, und ihre Exponenten eine arithmetische Proportion, oder Progreßion ausmachen, so machen die Glieder selber eine Geometrische aus.

Beweis. Es seyn die Glieder
am^5, am^9, am^2, am^6 ꝛc.

So ist $am^5 : am^9 = \frac{am^9}{am^5} = m^4$

Und $am^2 : am^6 = \frac{am^6}{am^2} = m^4$

Dahero $am^5 : am^9 = am^2 : am^6$. w. z. e. (§. 93.)

XIV. Abschnitt.

Von den zusammengesetzten Verhältnißen.

§. 117. Ein zusammengesetztes Verhältniß (*ratio composita*) entstehet, wenn man die correspondirenden Glieder zweyer oder mehr Verhältniße durcheinander, das ist die Antecedenten durch die Antecedenten, und die Consequenten durch die Consequenten multiplicirt.

Es seyn z. B. die Verhältniße $a : b$, $c : d$, $e : f$ rc. so wird $ace : bdf$ ein zusammengesetztes Verhältniß, jedes aber aus den drey gegebnen (wie $a : b$, oder $c : d$ rc.) die Wurzel (*ratio componens*) des zusammengesetzten Verhältnißes heißen.

§. 118. Sind nun diese Wurzeln, oder einfachen Verhältniße einander gleich, nämlich $a : b = c : d$ rc. so wird das daraus zusammengesetzte $ac : bd$ ein multiplicirtes Verhältniß genennt: und zwar in Sonderheit ein duplicirtes, wenn es aus zwey, ein triplicirtes, wenn es aus drey, ein quadruplicirtes, und s. f. wenn es aus vier einfachen gleichen Verhältnißen entstanden ist.

Es seyn z. B. die Wurzeln 4 : 8 = 3 : 6 = 5 : 10, so wird 60 : 480 ein triplicirtes Verhältniß einer jeden Wurzel in Sonderheit seyn. Jede aber aus den Wurzeln, als 4 : 8 oder 3 : 6 ꝛc. wird ein subtriplicirtes Verhältniß des zusammengesetzten 60 : 480 genennt.

§. 119. I. **Lehrsatz.** Das duplicirte Verhältniß ist jederzeit dem Verhältniße gleich, welches die Quadrate der Glieder einer jeden Wurzel gegeneinander haben.

Beweis. Es sey $a : aq = b : bq$.
So ist das duplicirte Verhältniß $ab : abq^2 = q^2$.
Nun ist aber auch $a^2 : a^2 q^2 = q^2$.
Folglich (§. 93.) ist
$ab : abq^2 = a^2 : a^2 q^2 = b^2 : b^2 q^2$. w. z. e.

§. 120. II. **Lehrsatz.** Das triplicirte Verhältniß ist jederzeit dem Verhältniße gleich, welches die Cubi der Glieder einer jeden Wurzel gegeneinander haben.

Beweis. Es sey $a : aq = b : bq = c : cq$.
So ist das triplicirte Verhältniß $abc : abcq^3 = q^3$.
Es ist aber auch $a^3 : a^3 q^3 = q^3$.
Folglich (§. 93.) ist
$abc : abcq^3 = a^3 : a^3 q^3 = b^3 : b^3 q^3$ ꝛc. w. z. e.

§. 121. Anmerkung. Ein Anfänger hat sich hier in Acht zu nehmen, daß er das duplirte Verhältniß von dem Duplicirten, das Triplirte von dem Triplicirten rc. wohl unterscheide.

Es ist also ein duplirtes Verhältniß dessen Exponent = 2. wie z. B. $3 : 6 = \frac{6}{3} = 2.$

Ein Triplirtes ist, dessen Exponent = 3, wie z. B. $2 : 6 = \frac{6}{2} = 3$ und so weiter. Dergleichen Verhältniße sind nur einfache, das duplicirte, triplicirte rc. entgegen sind lauter zusammengesetzte und multiplicirte Verhältniße.

§. 122. III. Lehrsatz. Wenn mehr einfache Verhältniße $a : f$, $b : g$, $c : d$ rc. deren Exponenten m, n, q sind, vorkommen, wird das Product aller Antecedenten zum Producte aller Consequenten ein aus allen diesen zusammengesetztes Verhältniß haben.

Das ist, es wird $abc : fgd = mnq$ seyn.

Beweis. Weil $a : f = m$
$b : g = n$
$c : d = q$

Kön-

Können wir uns der allgemeinen Formel bedienen, und dafür schreiben

$$\begin{array}{l} a : am \\ b : bn \\ c : cq \\ \hline \end{array}$$

Dahero $abc : abcmnq = \frac{abcmnq}{abc} = mnq$ w. z. e.

§. 123. Anmerk. Ich hab mir nur eine kurze Abhandlung über die zur Geometrie ꝛc. nöthigsten Lehrsätze zu verfertigen vorgenommen, wozu diese wenige angebrachten Sätze von den Proportionen schon hinlänglich seyn können. Ich laße dahero hier unzahlbare nützlichste Anwendungen der Proportionen auf die in der Arithmetick so bekannten Regeln *trium*, *septem*, *falsi &c.* Kürze halber weg. Nur von den *allgemeinen Formeln* für die Glieder der geometrischen Progreßionen hab ich noch ein paar Worte zu sprechen, die ich in folgenden Aufgaben ohne weitläufigem Beweis hersetze, statt dessen ein einziger vorausgeschickter allgemeiner Lehrsatz dienen kann.

XV.

XV. Abschnitt.

Von den algebraischen Formeln der geometrischen Progreßionen.

§. 124. Lehrsatz. Jedes Glied der geometrischen Progreßion ist gleich dem Producte, welches entstehet, wenn man den Quotienten q zur Dignität, dessen Exponent $(n-1)$ die Zahl der vorhergehenden Glieder anzeigt, erhöhet, und mit dem ersten Gliede (a) multiplicirt.

Diesen Lehrsatz begreiflich zu machen, darf man nur eine geometrische Progreßion vor sich nehmen.

$\div a \,.\, aq \,.\, aq^2 \,.\, aq^3 \,.\, aq^4 \,.\, aq^5 \,.\, aq^6 \,.\, aq^7$. rc.

Man wird dabey alsobald wahrnehmen, daß z. B. das fünfte Glied aq^4 nichts anders, als ein Product aus dem ersten Gliede a in die vierte Potenz oder Dignität des Quotienten q sey.

Um diesen Lehrsatz durch eine allgemeine Formel auszudrücken, wollen wir das gesuchte Glied der Progreßion m nennen: so wird unsre Formel so aussehen $m = aq^{n-1}$.

Suchen wir nun das letzte Glied der Progreßion, und nennen es ω, so ist m (welches alle Glieder vorstellt) $= \omega$, und folglich auch $\omega = aq^{n-1}$.

§. 125.

§. 125. So können wir dann jezt aus was immer für drey gegebnen Größen, von den nachgesezten fünf, jederzeit die zwo übrigen finden in einer geometrischen Progreßion.

Denn es sey das erste Glied $= a$
Der Quotient, oder Exponent $= q$
Das lezte Glied $= \omega$
Die Zahl der Glieder $= n$
Die Summe der Progreßion $= S$.

So werden wir in folgenden Aufgaben für jede aus diesen Größen eine besondere allgemeine Formel finden.

§. 126. I. Aufgabe. Aus den drey gegebnen Größen a, ω, q die Summe S finden.

Auflös. und Beweis. In der geometrischen Progreßion ist jedes Glied ein Antecedent, außer das lezte ω, und jedes ist auch zugleich ein Consequent, außer das erste a.

Es ist hiemit die Summe aller Antecedenten $= S - \omega$.
Und die Summe aller Consequenten $= S - a$.

Da=

Dahero ist $S - \omega : S - a = a : a\,q$ (§. 110.)
Folglich $a\,q\,S - a\,\omega\,q = a\,S - a^2$
Das ist $q\,S - \omega\,q = S - a$
So ist $q\,S - S = \omega\,q - a$
Und endlich $$S = \frac{\omega\,q - a}{q - 1}$$

§. 127. Hieraus laßen sich noch drey allgemeine Formeln durch die Rechnung herschaffen; denn

Weil $$S = \frac{\omega\,q - a}{q - 1}$$

So ist I. $$\omega = \frac{Sq - S + a}{q}$$

II. $$q = \frac{S - a}{S - \omega}$$

III. $$a = \omega\,q - S\,q + S.$$

§. 128. II. Aufgabe. Aus den drey gegebnen Größen a, n, q die nämliche Summe S finden.

Aufl. u. Beweis. $S - \omega : S - a = a : a\,q$ (§. 126.) Es ist aber $\omega = a\,q^{n-1}$. (§. 124.)

Folglich, wenn wir substituiren, ist
$$S - a\,q^{n-1} : S - a = a : a\,q.$$

Da-

Dahero $Saq - a^2 q^n = Sa - a^2$

Das ist $Sq - a q^n = S - a$

Folglich ist $Sq - S = aq^n - a$

Und endlich $S = \frac{aq^n - a}{q - 1}$

§. 129. III. Aufgabe. Aus den drey gegebnen Größen n, a, ω den Exponenten q finden.

Aufl. und Beweis. Weil $\omega = a q^{n-1}$

So ist $\frac{\omega}{a} = q^{n-1}$

Dahero $\sqrt[n-1]{\frac{\omega}{a}} = q$

§. 130. IV. Aufgabe. Aus den drey gegebnen Größen ω, n, q das erste Glied a finden.

Aufl. und Beweis. Weil $\omega = a q^{n-1}$

So ist $a = \frac{\omega}{q^{n-1}}$

§. 131. V. Aufgabe. Aus den drey gegebnen Größen a, ω, q die Zahl der Glieder n finden.

Aufl.

Aufl. und Beweis. Weil $\omega = aq^{n-1}$

So ist $\frac{\omega}{a} = q^{n-1}$

Wenn wir nun die beyden Glieder dieser letzten Aequation durch q multipliciren, bekommen wir $\frac{\omega q}{a} = q^n$.

Weil wir nunmehr wissen, daß $q^n = \frac{\omega q}{a}$ sey, braucht es, um den Exponenten n, oder die Zahl der Glieder zu bestimmen, mehr nicht, als daß man den Quotienten q nach und nach immer zu einer höheren Potenz so lang erhebe, bis man auf die Größe $\frac{\omega q}{a}$ komme; so wird die Zahl der Dignitäten von q die gesuchte Zahl der Glieder seyn.

Es sey z. B. $\omega = 24$
$a = 3$
$q = 2$

So ist $\frac{\omega q}{a} = \frac{48}{3} = 16 = q^n$.

Will ich nun die Größe n finden, mache ichs so: $q^1 = 2.\ q^2 = 4. = q^3 = 8.\ q^4 = 16.$ so habe ich $n = 4$.

XVI.

XVI. Abschnitt.

Anhang von den Anfangsgründen der Radicalrechnung.

Wahr ists, es kömmt eben der Gebrauch dieser Rechnung, besonders bey einem Anfänger, so gar oft nicht vor. Es würde aber doch für ihn sehr verdrüßlich seyn, wenn er in Durchlesung der schönsten Bücher seines Faches nur darum nicht fortkommen könnte, weil er die ersten, und so leichten Gründe der Radicalrechnung nicht besitzt. Ich entschloß mich darum einen kurzen Anhang davon herzuschreiben. Zween Sätze zum voraus, drey Aufgaben, und noch zween Lehrsätze sollen den ganzen Anhang ausmachen.

§. 132. **Radicalgrößen** (*quantitates surdæ* oder *incommensurabiles*) werden diejenigen genennt, deren wahre Wurzel durch keine Zahl kann ausgedrückt werden, und denen man also nur das Radicalzeichen vorsetzen muß. So sind z. B. $\sqrt{2}$. $\sqrt[3]{3}$. $\sqrt[4]{15}$. rc. lauter Radicalgrößen.

§. 133. I. Satz. Gleichwie $a \times b = ab$

So ist auch $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

Beweis. Es sey $\sqrt{a} = x$
$\sqrt{b} = z$

So ist $a = x^2$
$b = z^2$

Dahero $ab = x^2 z^2$
Folglich $\sqrt{ab} = \sqrt{x^2 z^2} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

§. 134. II. Satz. Wenn eine Radicalgröße a den nämlichen Exponenten mit dem vorgesetzten Radicalzeichen hat, wie $\sqrt[n]{a^n b}$, so kann die Größe a voraus gesetzt, und ihr Exponent n gar weggelaßen werden, ohne den Werth der ganzen Radicalgröße zu verändern.

Es ist also $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$.

Beweis. Jene Größen sind einander gleich, die, wenn sie zur nämlichen Dignität erhoben werden, gleiche Producte hervorbringen; nun aber, wenn wir z. B. die Größe $\sqrt[3]{a^3 b}$ zur dritten Dignität erheben, bekommen wir $a^3 b$ (§. 10.) wir bekommen aber auch das nämliche Product $a^3 b$ wenn wir die Größe $a\sqrt[3]{b}$ zur dritten Dignität erheben.

Folglich ist $\sqrt[3]{a^3 b} = a\sqrt[3]{b}$, und um uns allgemein auszudrücken $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$, w. z. e.

§. 135.

§. 135. **Anmerk.** Man sieht von sich selbst, daß die arithmetischen Zahlen für $a\sqrt[3]{b}$ leichter, als für $\sqrt[3]{a^3 b}$ substituirt werden können, dahero der Ausdruck $a\sqrt[3]{b}$ simpler ist, als $\sqrt[3]{a^3 b}$.

§. 136. Man kann sich der nämlichen Reduction auch gar oft in den Zahlen mit Vortheil bedienen, und z. B. statt $\sqrt{12}$ schreiben $2\sqrt{3}$.

Beweis. $\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3}$. Es ist aber $\sqrt{4} = 2$. Folglich ist $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$.

So ist auch $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$. Denn es ist $54 = 27 \times 2$. Dahero $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{2}$. Es ist aber $\sqrt[3]{27} = 3$. Folglich $\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$.

§. 137. **I. Aufgabe. Irrational- oder Radicalgrößen unter den nämlichen Nenner bringen.**

Dieß heißet eben so viel als, wenn zwo oder mehr Größen Radicalzeichen verschiedner Dignitäten vor sich haben, sie alle unter das Zeichen der nämlichen Dignität bringen, ohne ihren Werth zu verändern.

Aufl. Es seyn die Radicalgrößen $\sqrt[n]{a^m}$ und $\sqrt[s]{b^r}$ unter den nämlichen Nenner zu bringen.

$$\text{So ist I. } \left.\begin{aligned} \sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}} \\ \sqrt[s]{b^r} &= b^{\frac{r}{s}} \end{aligned}\right\} \quad (\S.\ 16.)$$

II. Weil nun die Exponenten $\frac{m}{n}$, $\frac{r}{s}$ Brüche sind, bringe man diese unter den nämlichen Nenner, so bekömmt man $\frac{ms}{ns}$, und $\frac{nr}{ns}$, folglich statt $a^{\frac{m}{n}}$ und $b^{\frac{r}{s}}$ erhält man $a^{\frac{ms}{ns}}$ und $b^{\frac{nr}{ns}}$.

III. Setzt man nun wieder das Radicalzeichen beyden voraus, wird ns der Exponent von beyden, und die reducirten Größen $\sqrt[ns]{a^{ms}}$, $\sqrt[ns]{b^{nr}}$ den vorigen $\sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[s]{b^r}$ gleich seyn.

Eben so wird man auch in bestimmten Zahlen finden, daß z. B. diese zwo Radicalgrößen $\sqrt[4]{5}$, und $\sqrt[6]{11}$, wenn sie auf vorige Art unter den nämlichen Nenner reducirt werden, diesen gleich seyn $\sqrt[12]{125}$ und $\sqrt[12]{121}$.

Zuweilen kann man die Operation noch kürzer machen. Man soll z. B. die Radicalgrößen $\sqrt{a^2}$ und $\sqrt[3]{b}$ unter den nämlichen Nenner bringen, darf man nur statt $\sqrt{a^2}$ setzen $\sqrt[3]{a^3}$, so ists geschehen. Daß aber $\sqrt[3]{a^3} = \sqrt{a^2}$ sey, bedarf keines Beweises, wenn man nur bedenken will, daß die Quadratwurzel von a^2, und die Cubickwurzel von a^3 die nämliche Quantität a sey.

So

So wird auch $\sqrt{5}$ und $\sqrt[6]{10}$ unter den nämlichen Nenner stehen, wenn man setzt

$$\sqrt[6]{5^3} \text{ und } \sqrt[6]{10} = \sqrt[6]{125}, \ \sqrt[6]{10}.$$

§. 138. II. **Aufgabe. Irrational- oder Radicalgrößen addiren, oder subtrahiren.**

Commensurable Größen (*quantitates commensurabiles*) werden in der Algebra diejenigen genennt, deren Verhältniß gegeneinander durch Zahlen kann ausgedrückt werden. Und solche giebt es auch zuweilen unter den Radicalgrößen, so oft nämlich nach dem Radicalzeichen beyderseits die nämlichen Buchstaben, oder Zahlen vorkommen, z. B. $5\sqrt{2}$ und $3\sqrt{2}$.

Denn es ist $5\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 5 : 3$.
So ist auch $a\sqrt{m} : b\sqrt{m} = a : b$. (§. 101.)

Aufl. I. Wenn die gegebnen Radicalgrößen commensurabel sind, addirt oder subtrahirt man zu erst die Zahlen oder Buchstaben, die vor dem Radicalzeichen stehen. Zur Summe oder Differenz setzt man, als einen Coeficienten, die noch übrige Radicalgröße sammt ihrem Zeichen. Etwelche Beyspiele werden die Sache begreiflicher machen.

I.	$4\sqrt{7}$	+	$2\sqrt{7}$	=	$6\sqrt{7}$
II.	$5\sqrt{6}$	+	$3\sqrt{6}$	=	$8\sqrt{6}$
III.	$9\sqrt{5}$	−	$4\sqrt{5}$	=	$5\sqrt{5}$
IV.	$a\sqrt{m}$	+	$b\sqrt{m}$	=	$(a+b)\sqrt{m}$
V.	$c\sqrt{bd}$	−	$e\sqrt{bd}$	=	$(c-e)\sqrt{bd}$
VI.	$3a\sqrt{p}$	+	$6a\sqrt{p}$	=	$9a\sqrt{p}$ ꝛc.

II. Sind aber die gegebnen Größen nicht commensurabel, addirt, und subtrahirt man sie, wie andere Größen durch die entzwischen gesetzte Zeichen + und —.

So schreibt man z. B. $4\sqrt{bc} + \sqrt{bd}$
Oder $a\sqrt{n} + b\sqrt{c}$.

§. 139. III. Aufgabe. Irrational- oder Radicalgrößen multipliciren, und dividiren.

Aufl. I. Man bringe (nach der ersten Aufg.) die Größen unter den nämlichen Nenner, und drücke sie so simpel aus, als es möglich.

II. Multiplicire, oder dividire man diejenige Größen untereinander, die vor dem Radicalzeichen stehen, wenn solche vorhanden.

III. Multiplicire, oder dividire man auch die, welche nach dem Zeichen stehen.

Bey-

Beyspiele der Multiplication.

I. $\sqrt{a} \times \sqrt{bcd} = \sqrt{abcd}$

II. $(\sqrt{ab} + \sqrt{ad}) \times \sqrt{ac} = \sqrt{a^2bc} + \sqrt{a^2dc}$

III. $d\sqrt{bc} \times 3b\sqrt{a} = 3bd\sqrt{abc}$

IV. $(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \times (\sqrt{a}-\sqrt{b}) = \sqrt{a^2} - \sqrt{b^2} = a - b.$

Anmerk. Hier ist durch die Multiplication der Irrationalen das Product zur Rationalgröße geworden, wie es eben auch in folgenden Zahlen geschieht.

V. $2\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{9} = 8 \times 3 = 24.$

Beyspiele der Division.

I. $\sqrt{ab} : \sqrt{b} = \sqrt{a}$

II. $\dfrac{3dc\sqrt{bcf}}{3d\sqrt{f}} = c\sqrt{bc}$

III. $\dfrac{ac\sqrt{bm} - cc\sqrt{dm}}{c\sqrt{m}} = a\sqrt{b} - c\sqrt{d}$

IV. $\dfrac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$; denn wenn ich das Quadrat mit seiner Wurzel dividire, wird der Quotient die Wurzel seyn, so ist $\dfrac{4}{\sqrt{4}} = \sqrt{4}$ das ist $\dfrac{2 \times 2}{2} = 2.$

§. 140. I. **Lehrsatz.** Eine Radicalgröße zur zweyten, dritten, oder höheren Dignität zu erheben ist nur vonnöthen, daß man die nach dem Zeichen stehende Quantität zur verlangten Potenz erhöhe, und das vorige Radicalzeichen wieder voraus setze.

Daher ist das Quadrat von $\sqrt{a} = \sqrt{a^2}$, der Cubus $= \sqrt{a^3}$ rc.

Beweis. Das Quadrat von $\sqrt{a}$ erhält man, wenn mans mit sich selber einmal multiplicirt.

Es ist aber $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2}$, w. z. e.

So ist auch $\sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{a} = \sqrt{a^3}$.

Die Quadrat- oder Cubick-Wurzel rc. von $\sqrt{a^2}$ aber wird so ausgedrückt $\sqrt{\sqrt{a^2}}$, $\sqrt[3]{\sqrt{a^2}}$, und überhaupt $\sqrt[n]{\sqrt{a^2}}$.

§. 141. II. **Lehrsatz.** Um aus einer Radicalgröße die Quadrat- Cubickwurzel rc. auszuziehen, ist mehr nicht nöthig, als daß man den Exponenten des vorgesetzten Zeichens durch den Exponenten der gesuchten Wurzel multiplicire, und das Product davon über das Zeichen schreibe; die nach dem Zeichen stehende Quantität aber unverändert dort stehen laße.

Dahero die Quadratwurzel von $\sqrt{a^3} = \sqrt[4]{a^3}$ ist.

Be-

Beweis. Es ist $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[4]{a^3} = \sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^3}$. Folglich ist $\sqrt{a^3}$ das Quadrat, welches entstanden aus $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[4]{a^3}$. Hiemit muß nothwendig $\sqrt[4]{a^3} = \sqrt{\sqrt{a^3}}$ seyn.

Von
den ersten und nöthigsten
Grundsätzen
der
Geometrie.

Anmerkung.

Alles, was wir von einem Körper, oder seinem Raum, den er einnimmt, die Ausmessung betreffend, fragen können, ist: wie lang oder hoch, wie breit, und wie tief er sey? Dieß dreyfache Maaß nun ist der Gegenwurf der Geometrie. Wir wollen ihn kurz in dreyen Abschnitten betrachten. In dem Ersten wird von den Linien, in dem Zweyten von den Oberflächen, in dem dritten von den dichten Körpern gehandelt werden.

Von den Gründen der Geometrie.

I. Abschnitt von den Linien.

I. Abhandlung.

Von den Eigenschaften der mathematischen Linien und ihren verschiednen Bewegungen.

§. 1.

Ein Punct ist so etwas, das unendlich klein und untheilbar ist. Bilden wir uns ein, ein solcher Punct bewege sich von A (1. *Fig.*) gegen B fort, und laße allenthalben ein Merkmal seiner Bewegung hinter sich, so wird dieses Merkmal in uns den Begriff einer Länge, die keine Breite hat, erwecken.

Diese

Diese Länge nun wird eine *Linie* genannt, eine *Gerade*, wenn der Punct, aus dessen Bewegung sie entsteht, auf keine Seite abweicht: weicht er aber ab; wird sie eine *krumme Linie* heißen.

Hieraus folget 1. die gerade *Linie* ist aus allen, die von einem Punct zum andern können gezogen werden, die Kürzeste. 2. Wenn mir nur zween Puncten einer geraden Linie bekannt sind, weiß ich ebendarum schon die Lage der ganzen *Linie*. 3. Wenn eine Linie die andere durchschneidet, werden beyde nur in einem einzelen Puncte durchschnitten. 4. Gleich lange Linien decken einander.

§. 2. Bilden wir uns ein, A B (2. *Fig.*) sey eine unbewegliche Linie. Auf dieser liege eine Zwote, der vorigen gleiche Linie A B, die aber um ihren Mittelpunct C auf einer ebnen Fläche beweglich ist. Wenn sich nun diese um ihren Puncte C so lang bewegt, bis der Punct B durch E D und H in den Puncte A einfällt, wird zu gleicher Zeit der Punct A durch F G und I bis in den Punct B fortrücken, und auf solche Art von den zween Puncten A und B eine krumme in sich selbst laufende Linie A D B G A beschrieben werden, in welcher alle Puncte von dem Puncte C gleichweit abstehen.

Diese

Diese so beschriebene Figur wird ein Zirkel genennt. Der Punct C heißet dessen Mittelpunct, oder Centrum. Die krumme Linie A G B D nennt sich Peripherie, Circumferenz, oder Umfang des Zirkels. Ein jeder Theil dieser Peripherie, wie A E oder E B ꝛc., wird Arcus ein Zirkelbogen, jede gerade Linie aber, die von einem Puncte der Peripherie zum andern durch den Mittelpuncte C läuft, wie A B oder H I, wird Diameter, oder der Durchmesser des Zirkels benamset. Die Helften davon werden Radii, oder Stralen genennt.

Wenn man nur obenhin Acht giebt, wie ein Zirkel durch die Bewegung des Diameters entstehet, wird man ohne weiters überzeiget seyn, daß, wie die Durchmesser, also auch ihre Helften, oder die Stralen des nämlichen Zirkels alle einander gleich seyn.

Eine jede gerade Linie, die von einem Puncte der Peripherie zum andern gezogen wird, wie F I ist eine Chorda, oder Senne. Der zwischen der Linie F I und dem Bogen F G I liegende Raum heißet ein Segment oder Abschnitt. Jeder Theil des Zirkels, der zwischen zween Stralen A C, H C lieget, und von dem Bogen A H geschlossen wird, heißet ein Sector. Aber von dem Zirkel wollen wir weiter

unten

unten handeln, und jezt über unsre Linie AB noch einige Betrachtungen machen.

§. 3. So bald die Linie A B (3. *Fig.*) sich zu bewegen nur anfängt, verläßt sie I. aufeinmal alle Puncten der unbeweglichen Linie A B, auf der sie lag; nur den einzelen Punct C berührt sie noch. II. Jeder Punct der halben Linie C b entfernet sich just so weit von der unbeweglichen halben Linie C B gegen D hinauf, so weit sich die andere Helfte C a von C A gegen G herunter entfernet. So kömmt z. B. der Punct e in d in der nämlichen Zeit durch den Bogen e d hinauf, in welcher der Punct f durch den Bogen fm in m kömmt, III. Bis die Linie a b von B durch D in A herum den ganzen Zirkel beschrieben, hat sie indessen alle nur erdenkliche Inclinationen gegen der unbeweglichen Linie A B gehabt. Sie war bald mehr, bald weniger, und in dem D gar auf keine Seite gegen der unbeweglichen Linie A B inclinirt. IV. Die Grösse dieser Inclination bestimmt der Bogen e d oder b B, der aus dem Puncte C zwischen den Linien C b und C B mit was immer für einer Oeffnung des Zirkels kann beschrieben werden.

§. 4.

§. 4. Diese Inclination zwoer Linien, die sich in einem Puncte berühren, wird ein *Winkel* genennt. Ein rechter *Winkel*, wenn sich die bewegliche Linie auf keine Seite neiget gegen der Unbeweglichen. So ist D C B ein rechter Winkel. Ein scharfer *Winkel* heißet der, welcher kleiner ist, als der Rechte, wie D C b: endlich ein stumpfer *Winkel* ist jener, der größer ist, als ein Rechter, wie D C a. Den Punct C wo die zwo Linien zusammenkommen, nennen wir den *Kopf* oder Spitze des Winkels: die gerade Linie aber, die mit einer anderen einen rechten Winkel ausmacht, heißet eine *Perpendiculair Linie.*

§. 5. Hieraus folget 1. Eine jede Perpendiculair Linie macht mit der andern beyderseits zwo gleiche Winkel aus, weil jeder zu beyden Seiten ein rechter Winkel ist.

2. Ein jeder Punct z. B. d (4. *Fig.*) der Perpendiculair Linie D C stehet von was immer für zween Puncten der Linie A B, z. B. f und e, die von dem Puncte C gleiche Entfernung haben, gleichweit ab. Dieß hat zwar eines Beweises nöthig, den wir aber erst geben können, wenn wir von den Dreyecken handeln werden.

 3. Auf

3. Auf den nämlichen Puncte einer geraden Linie können nicht mehrer, als nur eine Perpendicularlinie gezogen werden.

4. Da eine jede Zirkel Peripherie, sie möge groß oder klein seyn, in 360. gleiche Theile, die wir Grade nennen, getheilet wird; enthält die ganze Peripherie eines jeden Zirkels 4 rechte Winkel. Dahero wenn sich mehr Linien in dem nämlichen Puncte einander schneiden, wird die Summe aller Winkeln, die sie miteinander ausmachen, just vier rechten Winkeln gleich seyn.

5. Wenn eine Linie auf eine andere fällt, macht sie mit dieser beyderseits einen Winkel; und beede zusammen sind jederzeit zween rechten Winkeln, oder 180° Graden gleich, weil ihr Maaß einen halben Zirkel ausmacht. So ist (5. *Fig.*) $x + y = 180^{\circ}$: und wenn $x = y$, ist jeder $= 90^{\circ}$

6. Das Maaß eines rechten Winkels ist hiemit der vierte Theil einer Zirkelperipherie, das ist 90 Grade.

7. Verticalwinkel entstehen, so oft eine Linie die andere durchschneidet. So sind z. B. *a* und *c*

(6. *Fig.*)

(6. *Fig.*) Verticalwinkel, wie eben auch *b* und *d*. Man sieht aber von sich selbst aus dem Vorgehenden, daß *a* = c und *b* = *d* sey. Denn $a + b = 180^{\circ}$

und $c + b = 180^{\circ}$

folglich $a + b = c + b$

und endlich $a = c$.

Eben so wird erwiesen, daß $b = d$ sey.

Nun wird es nimmer schwer seyn folgende Aufgaben aufzulösen.

§. 6. I. Aufgabe. In jedem gegebenen Puncte D (7. *Fig.*) einer geraden Linie A C eine Perpendiculair aufrichten.

Auflösung. 1. Man bestimme aus dem Puncte D mit willkührlicher Oeffnung des Zirkels auf der gegebenen Linie A C zween Puncte e und f, welche gleichweit von D entfernet sind.

2. Beschreibe man aus dem Puncte f, mit der nämlichen, oder einer andern Oeffnung des Zirkels (die aber doch größer als f D seyn muß) den Bogen b g, und mit eben dieser Oeffnung aus e den Bogen m n.

3. Wird nun von D durch O, wo sich die zween Bögen schneiden eine gerade Linie gezogen, wird diese die verlangte Perpendiculair seyn.

Beweis. Erstlich ist der Punct D von e und f gleichweit entfernet. Zweytens, weil e O und f O Stralen des nämlichen Zirkels, oder die nämliche Zirkelöffnung sind, steht auch O gleichweit von e und f ab.

So sind dann zween Puncte der Linie D O von zween Puncten der Linie A C gleichweit entfernet. Folglich ist D O die gesuchte Perpendiculair. (§. 1. n. 2.) (§. 5. n. 2.)

Es ist also die Linie D O unstrittig die kürzeste die man aus dem Puncte O auf die Linie A C ziehen kann: und hiemit ist die Perpendiculairlinie, um den Abstand zweyer Oerter voneinander zu bestimmen, jederzeit die tauglichste.

§. 7. II. Aufgabe. *Von einem außerhalb der Linie gegebenen Punct O (8. Fig.) auf die Linie A C eine Perpendicular herunter ziehen.*

Aufl. Man schneide aus dem Puncte O mit willkührlicher Oeffnung des Zirkels in der gegebenen Linie A C zween Puncte e und f ab.

2. Auf

2. Aus e und f (wie in der vorhergehenden Aufgabe) beschreibe man die Kreuzbögen b g und m n.

3. Aus O durch h ziehe man eine gerade Linie, die in D fallen, und die gesuchte Perpendiculair seyn wird.

Der Beweis ist der nämliche, wie in der vorhergehenden Aufgabe.

§. 8. III. **Aufgabe.** *Eine gegebene Linie* A C (9. *Fig.*) *in zween gleiche Theile abtheilen.*

Auflös. Aus den äussersten Puncten A und C beschreibe man, wie vorher, Kreuzbögen sowohl unter- als oberhalb der gegebenen Linie.

2. Die vom Puncte b gegen d gezogne Linie wird das Mittel der Linie A C in O bestimmen.

Beweis. Die Linie b O steht senkrecht auf der Linie. A C (§. 7.) Dahero sind alle Puncten dieser Linie, und, folglich auch der Punct O gleichweit von A und C entfernet. Hiemit ist A O = O C.

§. 9. IV. **Aufgabe.** *Auf der gegebenen Linie* a b (10. *Fig.*) *einen Winkel beschreiben, der dem gegebenen Winkel* m *gleich ist.*

Aufl. Man setze den einten Fuß des Zirkels in den Spitze c des Winkels m, und beschreibe innerhalb den Schenkeln c d und c e mit willkührlicher Oeffnung einen Bogen k l.

2. Mit der nämlichen Apertur beschreibe man aus dem Puncte b den Bogen q n. Auf diesen übersetze man den Bogen k l aus q in f.

3. Zieht man nun aus b durch f eine gerade Linie, wird der Winkel g, dem gegebenen Winkel m gleich seyn.

Beweis. Winkel, die gleiche Maaße haben, sind einander gleich. Nun ist k l das Maaß des Winkels m, q f des Winkels g (§. 3. n. 4.). Es ist aber k l = q f: folglich m = g.

II. Abhandlung.

Von den Eigenschaften der Parallellinien.

Nochmal wollen wir die erste Figur, und unsere unbewegliche Linie A B vor uns nehmen, um eine Wahrheit zu entdecken, die in der Geometrie von großer Wichtigkeit ist.

§. 10.

§. 10. Bilden wir uns ein, es liegen auf der unbeweglichen Linie A B (11. *Fig.*) zwo andere bewegliche Linien a b und E F. Lassen wir weiters die Linie E F sich um den Punct C bewegen, die Zweyte aber a b von der unbeweglichen A B so fortrücken, daß ihr Abstand voneinander, oder die Perpendickeln m n, C o, p q immerzu einander gleich bleiben. So werden diese zwo Linien A B und a b in was immer für einer Entfernung, wenn sie auch unendlich sollten verlängert werden, allenthalben gleichweit voneinander stehen, und nimmer zusammenlaufen. So gegeneinander stehende Linien nun heißen Parallellinien.

§. 11. Hierüber können wir verschiedne Betrachtungen machen. 1. So bald sich die Linie E F um den Punct C zu bewegen, und von der unbeweglichen A B zu weichen anfängt, muß sie nothwendig die, wenn es nöthig, verlängerte Parallel a b alsogleich durchschneiden. 2. Weil A B mit a b parallel läuft, wird die Inclination der Linie E F gegen A B die nämliche seyn, die sie gegen a b ist, und folglich wird E F mit A B die nämlichen Winkel machen, die sie mit a b machet.

§. 12. Der Winkel m (12. *Fig.*) wird der äußere, n der innere ihm entgegengesetzte, p und n aber, oder r und o die Wechselwinkel genennt.

§. 13. Alles nun, was wir von den Parallellinien AB und ab, wenn sie von einer dritten EF durchschnitten werden, zu erweisen haben, kömmt auf drey Lehrsätze hinaus.

I. Der äußere Winkel *m* ist dem inneren auf der nämlichen Seite entgegengesetzten Winkel *n* gleich.

Dieser Satz hat keines Beweises mehr nöthig, nach dem wir im vorhergehenden Absatze die Natur der Parallelen erklärt.

II. Die Wechselwinkel sind einander gleich. Das ist: $p = n$, und $o = r$.

Beweis. $m = n$

$m = p$ seinem Verticalwinkel.

Hiemit ist $n = p$ w. z. e.

Wiederum $p + r = 180^{\circ}$ (§. 5. n. 6.)

$o + n = 180$ Dahero $p + r = o + n$.

Es ist aber $p = n$. Folglich auch $o = r$.

III.

III. Die zween innere auf der nämlichen Seite sich befindende Winkel, sind jederzeit zween rechten Winkeln gleich.

Das ist $p + o = \overset{v}{180}$. und $r + n = \overset{v}{180}$.

Beweis. $p + r = \overset{v}{180}$. (§. 5. n. 6.)
Es ist aber $\underline{p = n}$.

Also ist auch $n + r = \overset{v}{180}$. w. z. e.

Wiederum ist $p + r = \overset{v}{180}$.
Es ist aber $o = r$.
Folglich ist auch $p + o = 180$. w. z. e.

§. 14. Aufgabe. Aus jedem gegebnen Puncte a (13. *Fig.*) eine einer anderen gegebnen Linie Cd parallellaufende Linie aG ziehen.

Aufl. 1. Aus dem gegebnen Puncte a beschreibe man einen Bogen Cn, der die gegebne Linie durchschneidet, wie hier im C. 2. Mit der nämlichen Zirkelöffnung beschreibe man aus dem Puncte C den Bogen dm. 3. von Cn schneide man den Bogen ad ab, so wird der Bogen Cg = ad seyn. 4. Durch a und g ziehe man die Linie aG, diese wird die gesuchte Parallel seyn.

Beweis. Wir haben a d = C g gemacht: zieht man nun die Linie EF durch die Puncte a nnd C, so sind diese zween Bögen das Maas der zween Wechselwinkeln x und y. Folglich ist der Winkel x = y, und ist die Inclination der Linie FE gegen G a die nämliche, die sie gegen C d ist. So ist denn G a die gesuchte Parallel zu C d. (§. 11.)

III. Abhandlung.

Von den Eigenschaften der Dreyecke.

§. 15. Ein Dreyecke ist eine Figur, welche drey Seiten, und eben so viel Winkel hat, wie A (14. 15. 16. 17. *Fig.*) die Dreyecke haben von ihren Seiten oder Winkeln her verschiedne Nämen. Sind alle drey Seiten gleich groß, wie in A, ists ein Gleichseitiges, sind aber nur zwo Seiten einander gleich, wie in B, so ist es ein gleichschenklichtes Dreyeck. Sind aber alle drey Seiten und Winkel einander ungleich, heißet das Dreyeck (wie C) Scalenum. Scharfwinkelicht wird das Dreyeck genennt, welches drey scharfe Winkel hat, wie A und B. Stumpfwinkelicht, welches einen stumpfen, wie C, rechtwinkelicht aber, welches einen rechten Winkel,

wie

wie d, hat. In jedem rechtwinkelichten Dreyecke (d) wird die dem rechten Winkel m entgegengesetzte Seite ab die Hypothenus genennet. In allen übrigen Dreyecken aber, kann jede Seite die Grundlinie desjenigen Winkels heißen, dem sie entgegengesezt ist. Der Begriff aber, den wir von der geraden Linie haben, ist schon erklecklich, uns zu überzeugen, daß in jedem Dreyecke die Summe zwoer Seiten jederzeit größer, als was immer für eine dritte Seite seyn müße.

§. 16. **Im gleichseitigen Dreyecke sind alle Winkel einander gleich.**

Bew. Setzen wir ein gleichseitiges Dreyeck BCD (18. *Fig.*) mit seiner Spitze C in den Mittelpunct eines Zirkels, dessen Stral den drey Seiten des Dreyeckes gleich sey: so wird nothwendig ein Bogen dieses Zirkels, nämlich BD die zween übrige Spitze dieses Dreyeckes berühren, der zugleich das Maas des Winkels x seyn wird.

Setzen wir aber statt der Spitze C die Spitze B in den Mittelpunct, so wird die Seite CD den nämlichen Zirkelbogen abschneiden, und er wird auch das Maas des Winkels y seyn.

Setzen

Setzen wir endlich die Spitze D in die Mitte, wird wieder der nämliche Bogen BD zum Maaße des Winkels z. Winkel aber, welche das nämliche Maas haben, sind einander gleich.

§. 17. *Aus was immer für einen Winkel eines gleichseitigen Dreyeckes ein Perpendicular auf die Grundlinie gezogen wird, wird davon jede Grundlinie in zween gleiche Theile, wie A d = d C (19. Fig.) getheilet.*

Um den Beweis dieses Satzes darf man sich nicht viel umsehen, wenn man nur bedenket, daß bey der Construction dieser Figur die nämliche Operation vorkomme, die wir §§. 6. 7. 8. bey Errichtung einer Perpendicular, oder bey Abtheilung einer Linie in zween gleiche Theile vorgeschrieben.

§. 18. Nehmen wir diese Figur nochmal vor uns, und bilden wir uns ein, die zwo Seiten A B (20. *Fig.*) und B C bewegen sich um den Punct B, und nähern sich der Perpendicular B D so, daß eine so weit, als die andere davon abstehe, nämlich AB bis in e, BC bis in f.

Wir werden leicht begreifen, daß in diesem Falle sowohl die zween Winkel z und w, als die Seiten

A B

AB, BC immerzu kleiner werden, je mehr sie sich der Perpendicularlinie BD nähern, ja gar verschwinden müßen, so bald die zwo Seiten AB und BC in dem Puncte D zusammenkommen.

Die Winkeln x und y aber, ob sie schon immerzu beede größer werden, bleibt doch jederzeit $x = y$.

Laßen wir aber die zwo Seiten AB und CB sich von der Perpendicularlinie BD gleichweit bis in m und n entfernen, werden wir das Widerspiel wahrnehmen; denn sowohl die Winkel z und w als die zwo Seiten AB und BC werden immerzu zugleich mit der Entfernung wachsen, die Winkel x und y aber abnehmen: doch wird auch in diesem Falle jederzeit $x = y$ bleiben.

§. 19. Jetzt wollen wir die Linie AB allein durch e, D, und f bis in n nach und nach fortrücken. In dieser Bewegung wird 1. der Winkel ABC oder $z + w$ immerzu kleiner werden. 2. Die Seite AB wird beständig abnehmen, bis sie in dem Puncte D kömmt, wo sie am kürzesten ist. Ueber D hinaus wächst sie wieder fort, und in dem Puncte C wird sie der Seite AB, das ist, sich selbst wieder gleich. Ueber den Punct C hinaus fängt sie wieder zu wachsen an, die Grundlinie AC aber verschwindet völlig, und das

Dreyeck

Dreyeck A B C wird in ein anders C B n, und der scharfe Winkel x, der immer größer geworden, in den stupfen Winkel k verändert.

Nun aber in diesem Dreyecke B C n (21. *Fig.*) ist die größte Seite B n, und der größte Winkel k. Nach diesem kömmt die Seite B C und der unveränderliche Winkel y. Endlich wird C n die kleinste Seite, und z der kleinste Winkel seyn.

§. 20. Jetzt wollen wir sehen, wie viel und was für geometrische Lehrsätze wir aus dieser einzigen Betrachtung ohne weiterem Beweise, als eben so viel natürlichste Folgen herausziehen können.

I. Ungleichen Winkeln sind auch ungleiche Grundlinien entgegengesetzt; dem Größern eine Größere, eine Kleinere dem Kleineren.

II. Gleiche Winkel aber haben gleiche Grundlinien in dem *nämlichen*, oder *in zwey gleichen* Dreyecken. Und gleichen Grundlinien stehen gleiche Winkel gegenüber.

III. Ein *Gleichseitiges* Dreyecke ist auch *gleichwinkelicht*, und ein *Gleichwinkelichtes* ist eben darum auch *gleichseitig*.

IV.

IV. In jedem gleichschenkelichten Dreyecke sind die an der Grundlinie stehende zween Winkel einander gleich.

V. In einem Dreyecke, dessen alle Seiten einander ungleich sind, können nimmer zween gleiche Winkel seyn.

VI. Eine Perpendicularlinie, die man in einem gleichschenkelichten Dreyecke von dem Winkel, den die zween Schenkel miteinander machen, auf die Grundlinie herab zieht, theilet diese jederzeit in zween gleiche Theile.

VII. In jedem Dreyecke, dessen alle Seiten einander ungleich sind, fällt die Perpendicularlinie ad (22. *Fig.*) so, daß sie in dem Dreyecke, und näher an dem größten Winkel c zu stehen komme, wenn das Dreyeck scharfwinkelicht ist.

VIII. Ist aber das Scalenum rechtwinkelicht, so fällt die Perdendicular auf eine der zwo Seiten, welche den rechten Winkel miteinander machen ab oder bc. (23. *Fig.*)

IX. Ist endlich das Scalenum stumpfwinkelicht, wird die Perpendicular ad (24. *Fig.*) außer

das

das Dreyecke hinaus auf die verlängerte Grundlinie fallen, auf jene Seite, wo der stumpfe Winkel c ist.

Anmerk. In diesen zween letzten Fällen nimmt man hier jederzeit eine der kleineren Seiten für die Grundlinie an.

§. 21. In jedem Dreyecke ABC (25. *Fig.*) wenn man durch was immer für einen Winkel desselben eine mit der Grundlinie AC parallellaufende Linie de zieht, werden x = v, und z = w seyn; denn sie sind Wechselwinkel. (§. 13. n. 2.) Hieraus folget der

§. 22. **Lehrsatz.** Die Summe aller drey Winkel in jedem Dreyecke ist zweenen rechten Winkeln, das ist, 180° Graden gleich.

Beweis. Die Summe der drey Winkeln $x + y + z$ haben für ihr Maas einen halben Zirkel;

Hiemit ist $x + y + z = 180^{\circ}$.
Es ist aber $x = v$ und $z = w$.

Folglich ist auch $v + y + w = 180^{\circ}$. w. z. e.

§. 23. Wenn in einem Dreyecke was immer für eine Seite verlängert wird, wie z. B. AC (26. *Fig.*) wird der äußere Winkel z der Summe der

zween

zween innern entgegengesetzten Winkeln v und y gleich seyn.

Beweis. $v + y + w = 180^\circ.$ (§. 22.)

$w + z = 180^\circ.$ (§. 5. n. 6.)

Folglich ist $v + y + w = w + z.$

Und endlich $v + y = z.$ w. z. e.

§. 24. Hieraus können wir wiederum folgende Sätze als schon erwiesene Wahrheiten ziehen.

I. In was immer für einem Dreyecke haben nicht mehr als nur ein einziger rechter, oder ein einziger stumpfer Winkel Platz, die zween übrige müßen scharfe seyn.

II. In einem rechtwinkelichten Dreyecke ist jeder aus den scharfen Winkeln das Complement des andern zu einen rechten Winkel, oder zu 90° Graden.

III. Wenn mir zween Winkel in einem Dreyecke bekannt sind, weiß ich auch den dritten, wenn ich nur die Summe der zween bekannten Winkeln von 180° abziehe: der Rest wird die Größe des dritten Winkels seyn.

IV. Ist mir nur ein Winkel eines Dreyeckes bekannt, so weiß ich auch die Summe der zween andern.

V. Wenn in einem Dreyecke zween Winkel, oder deren Summe zweenen Winkeln eines anderen Dreyeckes, oder ihrer Summe gleich ist, wird auch der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern Dreyeckes gleich seyn.

VI. In jedem gleichseitigen Dreyecke ist ein jeder Winkel der dritte Theil von der Summe zweener rechten Winkeln, das ist $\frac{1}{3}$ von $\overset{v}{180} = \overset{v}{60}$, oder welches das nämliche ist, $\frac{2}{3}$ von $\overset{v}{90} = 60$ zween dritte Theile eines rechten Winkels.

IV. Abhandlung.

Von der Vergleichung und Aehnlichkeit der Dreyecken.

§. 25. Gleiche Dreyecke sind diejenigen, deren alle Winkel, und alle, gleichen Winkeln entgegengesetzte, Seiten einander gleich sind. Sind aber nur allein die Winkel eines Dreyeckes den drey Winkeln eines anderen, nicht aber auch die Seiten gleich, werden solche Dreyecke ähnliche Dreyecke genennet.

§. 26. Correspondirende, oder ähnlich liegende Seiten (Homologa) werden in zween ähnlichen

Drey=

Dreyecken diejenige genennet, welche gleichen Winkeln entgegen stehen, oder welche die Grundlinien gleicher Winkeln sind. (§. 15.) Also z. B. in den zwo Dreyecken x und y (27. *Fig.*) in welchen die Winkel des einen den Winkeln des anderen gleich sind, das ist: A = a, B = b, C = c, werden AB und ab, BC und bc, AC und ac Homologa, oder correspondirende Seiten genennt.

§. 27. Ueberhaupt in allen Gattungen der ähnlichen Figuren werden diejenige correspondirende Theile oder Größen genennt, die in beyden Figuren den nämlichen Namen haben. So sind z. B. in zween oder mehr Zirkeln die Durchmesser, oder die Stralen, oder auch die Sennen gleicher Bögen correspondirende Theile.

§. 28. Wenn die drey correspondirende Seiten eines Dreyeckes M (28. *Fig.*) von den drey correspondirenden Seiten eines anderen daraufgelegten Dreyeckes N gedeckt werden, so sind die ganzen Dreyecke M und N einander gleich. Dieser Satz bedarf keines weitern Beweises: er ist aber sehr wichtig in unserer Geometrie, weil wir folgende nöthige Lehrsätze heraus ziehen können, die von anderen erst weitläuftig müßten erwiesen werden.

I. So viel wir immer über die nämliche Linie gleichseitige Dreyecke aufrichten, werden sie alle einander gleich seyn.

II. Wenn zween Winkel, und nur eine Seite eines Dreyeckes zweenen Winkeln, und der correspondirenden Seite eines anderen Dreyeckes gleich sind, sind auch die Dreyecke einander gleich.

III. Wenn in zweyen oder mehr Dreyecken zwo Seiten, und nur ein Winkel einander gleich sind, sind auch die Dreyecke einander gleich.

§. 29. Man beschreibe ein willkührliches Dreyecke ABC (29. *Fig.*) und durch was immer für ein Ecke desselben eine Linie DE, die mit der entgegengesetzten Grundlinie AB Parallel läuft.

Bilde man sich alsdenn ein, es bewege sich diese Linie DE, ohne ihren Parallelismus zu verändern, nach und nach bis auf die Grundlinie AB herab.

Wir werden in diesem Falle wahrnehmen, daß, wenn die bewegliche Linie bis in fg gekommen, sie, gleichwie von der Seite CA, also auch von der Seite CB den vierten Theil ($\frac{1}{4}$) abschneiden werde, nämlich

von

von AC den Theil Cf, und von CB den Theil Cg. Woraus wir dann folgende Proportion haben.

$$AC : BC = \frac{AC}{4} : \frac{BC}{4} = fC : gC.$$

Das ist: wenn fC der vierte Theil von AC ist, so wird auch gC der vierte Theil von BC seyn.

So wollen wir denn aus dem Puncte C ein Perpendicular cp auf die Grundlinie AB ziehen, und sie in 4 gleiche Theile abtheilen: durch die Theilungspuncte m, n, o aber die Parallelen fg, hi, kl ziehen. Aus den Puncten f, g, h, i, k, l, in welchen die zwo Seiten des Dreyeckes ACB von den Parallelen durchschnitten werden, ziehen wir wieder die kleine Perpendicularen fr, gx, hs, it, kq, lr.

Aus dieser Construction entstehen in dem Dreyecke ACp vier neue kleine Dreyecke, nämlich Cfm, fhr, hks, kAq, welche alle einander gleich sind.

Dieß zu erweisen braucht es mehr nicht, als daß man bedenke, daß alle vier lauter rechtwinkelichte Dreyecke seyn, in welchen, nebst dem rechten Winkel, Cm = fr = hs = kq, und der Winkel b = e = d = x sey, jederzeit der äußere Winkel dem inneren zwischen zwoen Parallelen.

Eben so wird erwiesen, daß in dem anderen Dreyecke B C p, die vier kleinen Dreyecke C m g, g x i ꝛc. einander gleich seyn. Folglich ist auch C f = f h ꝛc. und C g = g i ꝛc.

§. 30. Weil denn also erwiesen, daß Cf = f h, = h k = k A, und C f + f h + h k + k A = A C sey, so ist unstrittig Cf der vierte Theil von A C. Und eben darum auch Cg der vierte Theil von C B, und hiemit ist die Proportion richtig.

$$AC : BC = \frac{AC}{4} : \frac{BC}{4}.$$

§. 31. Hätten wir die Linie DE auf was immer für einen Theil (zum B. auf ($\frac{1}{7}$) den siebenten Theil der Linie C p herabrucken laßen, und sie in 7 Theile getheilet, würden wir 7 kleine Dreyecke erhalten haben, die wieder alle einander gleich wären, und würde unsere Proportion ohngefähr so ausgesehen haben:

$$AB : BC = \frac{AB}{7} : \frac{BC}{7}.$$

Kurz: um alle nur erdenkliche Theile auszudrücken, können wir uns dieser allgemeinen Formel bedienen.

$$AB : BC = \frac{mAC}{n} : \frac{mBC}{n}.$$

Hier-

Hieraus fließen folgende Sätze.

§. 32. I. Die Dreyecke Cfg, Chi rc. (30. *Fig.*) welche die Linie DE in ihrer Bewegung von dem großen △ ACB abschneidet, sind erstlich diesem ACB und auch sich selbst einander ähnlich.

Bew. der Winkel b = q
r = t (§. 13. I.)
m = m

Folglich △ Cfg ∽ △ ACB.

Wiederum e = q
s = t (§. 13. I.)
m = m

Folglich △ Chi ∽ △ ACB.

So ist auch nothwendig △ Cfg ∽ △ Chi. w. z. e.

II. Dahero so oft in was immer für einem Dreyecke eine oder mehr Linien gezogen werden, die mit einer Seite desselben Parallel laufen, wird das △ in zwey oder mehr andere getheilet, die alle einander ähnlich sind.

III. In allen ähnlichen Dreyecken stehen die correspondirenden Seiten in Proportion.

Dieß zu erweisen, dörfen wir nur das kleine ähnliche △ x (31. *Fig.*) so auf das Große hinlegen,

daß der Winkel m wieder auf m in dem Großen, und auch die correspondirende Seiten A C und f C ꝛc. auf einander zu liegen kommen, so wird jederzeit die dritte fg parallel mit der dritten AB laufen, und hiemit die vorigen Säze §§. 29. 30. 31. ihre Richtigkeit haben.

IV. Wenn in einem Dreyecke ACB (31. *Fig.*) ein mit der Grundline AB parallellaufende f g gezogen wird, stehen nicht nur die Seiten der Dreyecke selbst, sondern auch die Segmente fA und gB mit den correspondirenden Seiten des kleinern Δ nämlich Cf und Cg in Proportion. Das ist: mann kann folgern

$$Af : fC = Bg : gC.$$

Beweis. Weil $AC : fC = BC : gC$ (§. 30. ꝛc.) So ist auch $AC - fC : fC = BC - gC : gC$ (Allg. §. 103.) Das ist aber eben $Af : fC = Bg : gC$. w. z. e.

V. Wenn wir die 29ste Figur wieder vor uns nehmen, werden wir leicht wahrnehmen, daß auch die Grundlinien fg, hi, kl ꝛc. mit den Seiten, und unter sich selbst in Proportion stehen, und wir daher auch so folgern können:

$$Cf : fg = Ch : hi = Ck : kl = CA : AB.$$

§. 33. Wenn in einem rechtwinkelichten Δ A CB (32. *Fig.*) von dem rechten Winkel C aus, eine

Per-

Perpendicularlinie Cr auf die Hypothenuse AB gezogen wird, theilet diese das ganze Δ ACB in zwey andere x und y, deren jedes dem großen ACB ähnlich ist, und eines dem andern.

Beweis. In dem Δ x ist der Winkel r dem Winkel o + n des großen Dreyeckes gleich. Das ist

$r = n + o$ denn beyde sind rechte Winkel.

$p = p$ ist beyden gemein.

Also der 3te $o = m$ dem dritten Winkel.

So ist nun das $\Delta x \backsim ABC$.

Es ist aber auch in dem Δ y.

$r = o + n$

$m = m$

$n = p$

Dahero auch $\Delta y \backsim ABC$.

Und folglich $x \backsim y$ welches z. e.

§. 34. Hieraus fließen von sich selbst, und ohne weiters eine Menge in der Geometrie und Trigonometrie allerwichtigster Sätze. Wir wollen nur einige zum Beyspiele hersetzen.

I. Die Perpendicularlinie Cr ist jederzeit die mittlere Proportional zwischen den Segmenten der Hypothenuse. Das ist $(Cr^2) = Ar \times rB$, denn

 weil

weil x und y ähnliche Dreyecke sind, kann ich so folgern. $\div$ Ar : Cr : rB.

II. Jede Seite des großen Dreyeckes ACB ist die mittlere Proportial zwischen der ganzen Hypothenuse und dessen Segmente, welches bey derselbigen Seite stehet. Das ist: die Seite AC ist die mittlere Proportional zwischen der ganzen Hypothenus AB, und ihrem Segmente Ar. Denn (weil x und ACB ähnliche Dreyecke sind) kann ich so schließen: $AB : AC = AC : Ar$.

Die Seite CB aber ist die mittlere Proportional zwischen der ganzen Hypothenuse AB, und ihrem Segmente rB; denn ich kann wieder so folgern:

$$AB : CB = CB : rB.$$

III. Das Quadrat der Hypothenuse ist den Quadraten der zwo Seiten gleich, welches wir so ausdrücken: $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Diese Folge begreiflich zu machen, dörfen wir nur die eben vorher gefundne Proportionen wieder hersetzen; denn

Aus der erstern $AB : AC = AC : Ar$.
Haben wir $AC^2 = AB \times Ar$.

Aus

Aus der andern $AB : CB = CB : rB$.
Haben wir $CB^2 = AB \times rB$.

So ist $AC^2 + CB^2 = AB \times Ar + AB \times rB$.

Nun sey $AC^2 = m$ (33. *Fig.*)
$Adhi = r$
$dBiL = R$

So ist $AB \times Ad = r$
Hiemit $AC^2 = r = m$.

Und $AB \times dB = R$
Hiemit $CB^2 = R = M$.

Dahero ist $R + r = M + m$.
Es ist aber $R + r = AB^2$.
Und $M + m = AC^2 + CB^2$.

So ist denn endlich $AB^2 = AC^2 + CB^2$. w. z. e.

Und dieß ist eben der so bekannte pythagorische Lehrsatz, worauf fast die ganze Mathematick ruhet.

IV. Jetzt wird es nicht mehr schwer seyn, in jedem rechtwinkelichten Dreyecke aus zwo gegebnen Seiten die dritte zu finden. Denn wollen wir die Seite AB oder die Hypothenuse finden, so haben wir $AB^2 = AC^2 + CB^2$. (33. *Fig.*)

Hiemit $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$. Das ist: addire die Quadrate der zwo Seiten AC und BC; aus

der

der Summe aber zieh die Quadratwurzel, so bekömmst du die Hypothenuse AB.

Wollen wir aber die Seite CB finden, so haben wir wieder $AB^2 = AC^2 + CB^2$.

Hiemit $AB^2 - AC^2 = CB^2$.

Folglich $\sqrt{AB^2 - AC^2} = CB$. Das ist: zieh von dem Quadrat der Hypothenuse das Quadrat der bekannten Seite ab, und von dem Reste die Quadratwurzel aus, so bekömmst du die dritte Seite.

§. 35. Aus dem vorhergehenden können folgende Aufgaben aufgelöset werden.

I. Aufgab. *Eine gegebne Linie AB in so viel gleiche Theile abtheilen, als man will.*

Aufl. Setze zwo unbestimmte Linien AC und CB (34. *Fig.*) unter was immer für einen Winkel C zusamm.

2. Schließe sie mit der gegebnen Linie AB, daß ein Dreyecke ACB entstehe.

3. Theile die Linie AC in die begehrten gleiche Theile, und zieh die Parallelen fg, hi, kl ꝛc.

So wird $fg\ \frac{1}{9}$ von AB seyn, $hi = \frac{2}{9}$ $kl = \frac{3}{9}$

$MN = \frac{4}{9}$, $op = \frac{5}{9}$, $qr \frac{6}{9}$, $tv = \frac{7}{9}$ $wx = \frac{8}{9}$

$AB = \frac{9}{9} = 1.$

Den Beweis giebt der vorhergehende Absatz; denn es ist $Cf : fg = CA : AB$.

Es ist aber $Cf = \frac{CA}{9}$

So ist auch $fg = \frac{AB}{9}$ und s. w.

II. Aufgabe. Zu drey gegebnen Linien AC, CB, CD die vierte Proportionallinie finden.

Aufl. 1. Setze die zwo ersten gegebnen Linien unter was immer für einen Winkel zusamm.

2. Schließe die Figur mit der Linie AB (35. *Fig.*)

3. Verlängere die Linie CA so weit du willst.

4. Uebersetze auf diese verlängerte Linie aus dem Puncte A die gegebne dritte Linie CD, nämlich aus A in M, so ist AM = CD.

5. Aus dem Puncte M zieh ein Parallel mit AB und verlängere die Linie CB, bis sie diese in E durch-

schnei-

schneidet, so wird BE die gesuchte vierte Proportional seyn.

Denn es ist AC : BC = AM, das ist CD : BE.

III. Augabe. Zu zwoen gegebnen Linien AC, BC, (36. *Fig.*) die dritte Proportionallinie finden.

Aufl. Setze die gegebnen Zwo Linien wieder, wie zuvor, unter einen Winkel züsamm, und ziehe die Grundlinie AB.

Aus A in E übersetze die Linie CB, so ist AE = BC.

3. Aus E zieh mit AB eine Parallel, und verlängere CB bis in M, so ist BM die gesuchte dritte Proportional.

Denn es ist AC : CB = AE, das ist CB : BM.

IV. Aufgab. Zwischen zwoen Linien AB, BC die mittlere Proportionallinie finden.

Aufl. 1. Setze die zwo Linien zusammen, daß sie eine ABC (37. *Fig.*) miteinander ausmachen.

2. Theile diese zusammengesetzten Linien in zween gleiche Theile in d.

3. Aus d beschreibe einen halben Zirkel AmC.

4. In dem Puncte B richte eine Perpendicular auf, so wird eben diese mB die gesuchte mittlere Proportionallinie seyn.

Wir

Wir werden gleich in der folgenden Abhandlung (§. 39. n. II.) erweisen, daß der Winkel A m C ein rechter Winkel sey, und hiemit nach §. 34. n. I. $mB^2 = AB \times BC$, und folglich $AB : mB = mB : BC$ sey.

V. Abhandlung.

Von den Eigenschaften des Zirkels.

§. 36. Wenn in einem Zirkel zween Durchmesser AB und DE (38. *Fig.*) sich im Mittelpuncte C unter einem rechten Winkel durchschneiden, wird der ganze Umkreis in 4 gleiche Theile oder Bögen getheilet, dahero bey C 4 rechte Winkel entstehen. Bilde man sich nun ein, es liege auf der unbeweglichen Linie AB eine andere bewegliche FG. Laße man diese Linie von C gegen D hinauf rucken, ohne ihre Lage oder ihren Parallelismus mit AB zu verändern, so werden wir in dieser Bewegung folgende Wahrheiten entdecken.

I. Wie zuvor der Diameter AB, so wird auch jede Senne ab noch immer senkrecht auf dem Strale CD stehen, weil AB und ab jederzeit parallel bleiben.

II.

II. Wie zuvor der Bogen A D = B D war, so ist auch ein jeder Bogen a D = b D, und A a = B b, weil die Perpendicular a d jederzeit = b e bleibt.

III. Wie zuvor der Diameter A B, so wird auch eine jede Senne a b von dem Strale D C nicht nur senkrecht, sondern auch in zween gleiche Theile a c und c b in dem Puncte c getheilet.

IV. Die Bögen a D, f D ꝛc. die sich zwischen der beweglichen Linie, und dem Puncte D befinden, werden immerzu kleiner; die über den Umkreis des Zirkels aber hinaus reichende Theil der beweglichen Linie, nämlich n a, f m ꝛc. werden immerzu größer, je mehr sich die bewegliche Linie dem Puncte D nähert.

V. So bald die bewegliche Linie an den Punct D, welcher das Ende des Radius ist, hingekommen, bleibt sie zwar noch immer auf diesen Perpendicular, der Bogen aber zwischen ihr und dem Puncte D ist völlig verschwunden, und die ganze Linie F G steht nun außerhalb des Zirkels, den sie nur in einem einzigen Puncte D berühret. Und in dieser Lage wird die Linie F G eine Tagente genennet.

VI. Bilden wir uns ein, das gleichschenkelichte Dreyecke f C g (39. *Fig.*) bleibe unbeweglich stehen,

da

da sich indessen der ganze Zirkel um seinen Mittelpunct C bewegt.

In diesem Falle wird 1. die ganze Peripherie durch die Puncte f, D, und g laufen. 2. Wird die Senne fg auf allen Seiten den nämlichen Abstand von dem Mittelpuncte C haben. Hieraus und aus n. IV. folget:

1. In dem nämlichen Zirkel also, oder in gleichen Zirkeln stehen gleiche Sennen gleichweit, Ungleiche aber ungleichweit vom Mittelpuncte, und zwar die Kleinern immer weiter, als die Größern ab.

2. Gleiche Sennen schneiden im nämlichen Zirkel ꝛc. gleiche Bögen ab.

3. Wenn zwo Sennen AB und fg parallel sind, sind die entzwischen liegende Zirkelbögen Af und Bg einander gleich, wie auch fD und Dg.

4. Jede aus dem Mittelpuncte auf die Senne perpendiculargezogene Linie, theilet dieselbige in zween gleiche Theile.

5. Jede gerade Linie, welche eine Senne in zween gleiche Theile und senkrecht, oder unter einen rechten Winkel, theilet, muß nothwendig, wenn sie

 ver=

verlängert wird, durch den Mittelpunct des Zirkels laufen.

6. Jede gerade Linie C D, welche die Senne f g in zween gleiche Theile senkrecht theilet, theilet zugleich den Bogen f D g, und hiemit auch den Winkel f C g in zween gleiche Theile; denn es ist f D=D g.

7. Jeder Strale C D stehet auf der Tangente senkrecht, und jede Linie D G, die an dem äußersten Puncte D des Strales senkrecht steht, ist eine Tangente, und berühret den Zirkel nur in einem einzigen Puncte.

8. Aus was immer für einem Puncte c (40. *Fig.*) der außer dem Mittelpuncte ist, können nicht mehr als nur zwo gleiche gerade einander gegenüber stehende Linien a c und c b an die Peripherie gezogen werden.

Denn alle Linien, die an den obern Theil der Peripherie a D b aus c gezogen werden können, wie c d, sind kleiner als c b.

Denn der Winkel $x + y > x$.

Folglich ist auch $cb > cd$ (§. 20. n. I.)

Wiederum, alle Linien, die aus c an den untern Theil der Peripherie a f B können gezogen werden, wie c f, sind größer, als a c.

Denn

Denn $m+n > n$.

So ist auch $cf > ac$. (§. 20. n. I.) w. z. e.

9. So ist also derjenige Punct, aus welchem mehr, als nur zwo gleiche Linien an die Peripherie können gezogen werden, jederzeit der Mittelpunct des Zirkels.

10. Wenn man also aus was immer für einen Puncte c, (41. *Fig.*) der außer dem Mittelpuncte C des Zirkels ADBE angenommen wird, einen anderen Zirkel abde beschreibt, kann dieser jenen nur in zween Puncten a und b durchschneiden; denn sonst könnte man aus dem Puncte c auf die Peripherie des Zirkels ADBE mehr als zwo gleiche Linien ziehen.

11. Wenn ein Zirkel abc (42. *Fig.*) außerhalb, oder ein anderer efgd innerhalb einen Zirkel ADB berühret, berühret er ihn nur in einem einzigen Puncte; denn beede berühret die ihnen gemeinschaftliche Tangente mn nur in einem Puncte.

12. Wenn man auf eben diese Tangente eine gerade Linie Hd senkrecht zieht, wird sie durch die Mittelpuncte aller dieser Zirkel, und zugleich durch d oder a den Berührungspunct der Tangente laufen.

§. 37. Ein jeder Winkel m, (43. *Fig.*) den eine Tangente AD mit einer Senne AB machet, hat für sein Maas die Hälfte des mit der Senne correspondirenden Bogens AB, oder $\frac{AB}{2} = Al$.

Beweis. Man ziehe aus C eine Perpendicular auf die Senne AB, und verlängere sie bis in D, so ist AB in zween gleiche Theile Ap und pB geschnitten, und der Winkel DAC, oder m + o ist ein rechter Winkel (§. 36. n 5.)

So ist denn ADC ein rechtwinkelichtes Dreyeck, in welchem, von dem rechten Winkel A aus, eine Perpendicular Ap auf die Hypotenuse DC fällt, folglich ist der Winkel m = n. (§. 33.)

Es ist aber das Maas des Winkels $n = Al = \frac{AB}{2}$

Also ist auch das Maas von $m = Al = \frac{AB}{2}$

§. 38. Wenn man in dem nämlichen Zirkel eine der Senne AB parallellaufende andere Senne qf (44. *Fig.*) zieht, und sie bis an die Tangente AE verlängert, sieht man von sich selbst, daß der Winkel

r = m

r = m (§. 12.) und folglich sein Maas das nämliche, das ist, $\frac{AB}{2} = Al$ seyn werde.

Weil aber $Aq = Bf$.

So ist $\frac{AB}{2} = \frac{Af}{2} - \frac{Aq}{2}$ Das ist: das Maas eines jeden Winkels den eine Tangente mit der Secante ausmachet, ist die halbe Differenz der Bögen Aq und Af die zwischen der Tangente und der Secante liegen.

§. 39. Das Maas jedes Peripherialwinkels m (45. *Fig.*) ist der halbe Bogen DC, den die zween Schenkel AC und AD abschneiden.

Beweis. Man zieh durch den Punct A eine Tangente EB, so wird die Summe der drey Winkeln $S + m + n = 180$ und folglich ihr Maas $= \frac{AC}{2} + \frac{CD}{2} + \frac{DA}{2}$ oder ein halber Zirkel seyn.

Es ist aber das Maas des Winkels $n = \frac{AC}{2}$

Und des Winkels $S = \frac{AD}{2}$ (§. 37.)

So bleibt nun das Maas des Winkels $m = \frac{CD}{2}$.

Aus diesem folget I. Jeder Centralwinkel o ist doppelt so groß, als der Peripherialwinkel m dessen Schenkel auf dem nämlichen Bogen CD stehen, was sie immer sonst für eine Lage gegeneinander haben mögen.

II. Wenn ein rechter Winkel ein Peripherialwinkel ist, so muß seine Gründlinie der Diameter des Zirkels seyn, und seine Schenkel den halben Zirkel abschneiden, weil sein Maas $\frac{1}{4}$ des Zirkels ist: und jeder Peripheriewinkel, der den Diameter für seine Grundlinie hat, ist ein rechter Winkel.

III. Alle Peripherialwinkel, welche die nämliche Senne zur Grundlinie haben, sind einander gleich, $a = b = c$ (46. *Fig.*) ꝛc. denn das Maas eines jeden ist nämlich die Hälfte des Bogens $DE = \frac{DE}{2}$

IV. Jeder scharfe Peripherialwinkel b hat für sein Maas die Hälfte eines Bogens DE der kleiner ist, als der halbe Zirkel. Jeder stumpfe Winkel m aber hat die Hälfte eines Bogens DAE, der grösser ist, als ein halber Zirkel.

§. 40.

§. 40. Ein jeder Winkel M, (47. *Fig.*) den zwo Linien AM, und EM innerhalb einer Zirkelperipherie miteinander ausmachen, hat für sein Maas die halbe Summe der Bögen, welche die verlängerten Linien, nämlich AC und EB beyderseits abschneiden. Hiemit ist der Winkel $M = \frac{AE + BC}{2}$

Beweis. Man ziehe der Linie BE ein Parallel CD, so wird der Winkel N = M, und der Bogen BC = ED seyn.

Nun ist das Maas des Winkels $N = \frac{AE+ED}{2} = \frac{AE + BC}{2}$. Folglich ist auch das Maas des Winkels $M = \frac{AE+BC}{2}$. w. z. e.

§. 41. Ein jeder Winkel S (48. *Fig.*) den zwo Linien GB, und GC außerhalb einer Zirkelperipherie miteinander ausmachen, hat für sein Maas die halbe Differenz der Bögen BC und AE, welche dis durch den ganzen Zirkel verlängerte Linien beyderseite abschneiden. Hiemit ist der Winkel $S = \frac{AE - BC}{2}$

Beweis. Man ziehe aus dem Puncte B der Linie CE eine Parallel BD, so wird der Winkel p = S, und der Bogen DE = BC seyn.

Nun ist das Maas des Winkels $p = \frac{AD}{2} = \frac{AE - DE}{2}$

$= \frac{AE - BC}{2}$. Folglich ist auch das Maas des Winkels $S = \frac{AE - BC}{2}$. w. z. e.

§. 42. Jeder Winkel M, (49. *Fig.*) den zwo Tangenten AB und BC des nämlichen Zirkels miteinander ausmachen, hat für sein Maas die halbe Differenz der Bögen AC und CdA. Hiemit ist der Winkel $M = \frac{AdC}{2} - \frac{AC}{2}$.

Beweis. Man ziehe aus dem Puncte C eine mit BA parallellaufende Linie Cd, so ist M = N und der Bogen AC = Ad.

Nun ist das Maas des Winkels $N = \frac{Cd}{2} = \frac{ACd}{2}$

$- \frac{AC}{2}$. Folglich ist auch der Winkel $M = \frac{ACd - AC.}{2}$

§. 43.

§. 43. Wenn aus einem außerhalb des Zirkels angenommenen, oder gegebenen Puncte E (50. *Fig*) zwo Linien gezogen werden, deren eine E d die Tangente ist, die andere E b den Zirkel durchschneidet, wird jederzeit das Quadrat der Tangente E d, dem Producte aus der Linie E b, und dessen äußern Theil E a gleich seyn. Hiemit wird $\overline{Ed}^2 = Eb \times Ea$ seyn.

Beweis. Erstlich ist der Winkel $x = r = \frac{ad}{2}$

Und $n = n$

Folglich $y = m + x$

So sind denn die Dreyecke E d b und E d a ähnlich: und folglich stehen ihre correspondirende Seiten in Proportion. Daher können wir so schließen:

$$Eb : Ed = Ed : Ea$$

Das ist $\overline{Ed}^2 = Eb \times Ea$ w. z. e.

Hieraus läßt sich die artige Aufgabe auflösen: Eine Linie finden, daß, wenn man aus jedem Puncte derselben auf zween bestimmte gleiche oder ungleiche Zirkel Tangenten ziehet, diese jederzeit einander gleich seyn. (51. *Fig.*)

Man beschreibe die zween gegebenen Zirkel so, daß sie einander schneiden in a und b. Durch die Puncte

a und b zieh man eine unbestimmte Linie, die wird die Gesuchte seyn; denn aus was immer für einem außer den gegebenen Zirkeln stehenden Puncte dieser Linie zwo Tangente cd, cm, oder fg, hg gezogen werden, werden sie gleich seyn; weil $\overline{cd}^2 = \overline{cm}^2 = cb \times ac$: und wieder $\overline{fg}^2 = \overline{hg}^2 = ag \times gb$.

§. 44. Wenn zwo Linien aus einem außerhalb des Zirkels angenommenen Puncte E (52. *Fig.*) bis an die hohle Peripherie des Zirkels gezogen werden, sind die ganzen Linien Eb und Ec mit den äußern Theilen Ea, Ed *reciproce* proportional. Das ist: $Ea : Ed = Ec : Eb$.

Beweis. Man ziehe die Linien ac und db, so bekömmt man zwey ähnliche Dreyecke Edb ∽ Eac. Denn es ist der Winkel n = n in beyden der näml.

$$r = t = \frac{ad}{2}$$

Hiemit o = p der 3te dem dritten.

So können wir schließen: $Ea : Ec = Ed : Eb$

Folglich auch wechselweis: $Ea : Ed = Ec : Eb$. w. z. e.

§. 45. Wenn sich zwo Sennen AB, Cd (53. *Fig.*) in einem Zirkel schneiden, werden ihre Segmente AF, BF, CF, dF, *reciproce* proportional seyn. Das ist: $AF : DF = CF : BF$.

Beweis. Man ziehe die zwo Linien A C und B d, so haben wir in zwey Dreyecken die Winkel

$$x = y = \frac{Ad}{2}$$

Und $$r = t = \frac{BC}{2}$$

$$n = m$$ Verticalwinkel.

Hiemit sind die Dreyecke A C F, und B F d einander ähnlich, ihre correspondirende Seiten aber proportional.

Dahero schließen wir: AF : DF = CF : BF.

§. 46. Hieraus folget wiederum ein in der Geometrie wichtiger, und zum Theil schon in der IV. Aufgabe §. 35. berührter Lehrsatz. Nämlich:

Jede Perpendicularlinie, die man von was immer von einem Puncte der Peripherie C (54. *Fig.*) auf den Diamer A B ziehet, ist jederzeit die mittlere Proportionallinie zwischen den Segmenten des Diameters. Denn hier sieht man leicht, daß sich zwo Sennen A B und C e im Puncte d schneiden, hiemit sind ihre Segmente *reciproce* proportional. Ich kann also schließen: A d : d C = d e : d B.

Es ist aber C d = e d (§. 36. VI. 4.)

Folg-

Folglich ist $Ad : Cd = Cd : dB$.
Und $cd^2 = Ad \times dB$. w. z. e.

§. 47. **Aufgab.** Einen gegebenen Bogen, AdB, (55. *Fig.*) oder Winkel ACB in zween gleiche Theile theilen.

Aufl. Man ziehe die Senne AB, und auf diese aus dem Mittelpuncte C eine Perpendicular Cd; diese wird zugleich den Winkel, die Senne, und den Bogen in zween gleiche Theile schneiden.

§. 48. **Aufgab.** Den Mittelpunct eines gegebenen Zirkels, oder Bogens finden.

Aufl. Man ziehe in dem gegebenen Bogen oder Zirkel zwo willkührliche Sennen Ab, (56. *Fig.*) und bd. Beyde theile man in zwo gleiche Theile, und durch die Theilungspuncte ziehe man die Perpendicularlinien eC, fC. Im Puncte C, wo sich diese einander schneiden, ist der gesuchte Mittelpunct, weil sowohl eC, als fC durch den Mittelpunct laufen müßen. (§. 36. VI. 5.) Eben so verfährt man, wenn man durch 3 gegebene Puncte, (die nicht in einer geraden Linie liegen) wie Abd einen Zirkel beschreiben soll. Man zieht die gegebenen Puncte zusammen, und findet den Mittelpunct C wie zuvor.

§. 49.

§. 49. **Aufgab.** Auf eine gegebene Linie A B einen Zirkelbogen, oder Segmente beschreiben, welches einen gegebenen Winkel M (57. *Fig.)* zu fassen fähig ist.

Aufl. 1. An die äußersten Puncte A und B der gegebenen Linie setze man die Winkel m und m = M.

2. Aus den Puncten A und B richte man auf D A und D B Perpendicularlinien A C und B C auf, so wird C, wo sich die Perpendicularlinien schneiden, der Mittelpunct des gesuchten Segments, oder Bogens A o B seyn.

Beweis. $m = M$.

Es ist aber $m = \frac{AB}{2}$ (§. 37.)

Und n oder $s = \frac{AB}{2}$ (§. 39.)

Folglich ist $n = M$ und $S = M$: w. z. e.

§. 50. **Aufgab.** Auf einen gegebenen Puncte d (58. *Fig.*) in der Peripherie d e f g eine Tangente A B ziehen.

Aufl. Man ziehe den Stral C d, und richte am äußersten Puncte d die Perpendicular A d B auf,

diese

diese wird den Zirkel in dem bestimmten Puncte d berühren, und die gesuchte Tangente seyn.

§. 51. **Aufgab.** Aus einem bestimmten Puncte b (59. *Fig.*) auf einen gegebenen Zirkel eine Tangente ziehen.

Aufl. Man ziehe die Linie Cb, theile sie in m in zween gleiche Theile; aus m beschreibe man den halben Zirkel Cdb; wenn man nun aus b durch d, wo sich die Zirkelbögen einander schneiden, eine gerade Linie ab ziehet, wird diese die gesuchte Tangente seyn; denn es steht Cd der Stral, auf ab senkrecht, weil der Winkel n den ganzen Diameter für seine Grundlinie hat. (§. 39. II.)

Wenn man aus m statt des halben einen ganzen Zirkel beschreibt, wird dieser den gegebenen Zirkel in zweenen Puncten d und e schneiden; man bekömmt also zwo Tangenten bd und be die einander gleich sind. Ist also (allgebraisch zu reden) diese eine Aufgabe vom zweyten Grade.

VI. Ab-

VI. Abhandlung.

Von anderen verschiedenen Gattungen der Polygonen, oder Vielecken.

§. 52. Ein regulares Polygon, oder Vieleck ist, welches lauter gleiche Seiten, und Winkel hat. Alle anderen sind irregular. Ihre Namen haben sie von der Zahl der Seiten, und werden Fünfecke, Sechsecke, Siebenecke ꝛc. genennt, wenn sie fünf, sechs, oder sieben Seiten haben.

§. 53. Der Centralwinkel eines Polygons ist derjenige, den zween Radii AC und BC, (60. *Fig.*) die aus dem Mittelpuncte C an die Ecke A und B gezogen werden, miteinander ausmachen.

§. 54. Der Polygonswinkel aber ist derjenige, den zwo Seiten miteinander ausmachen. Ein solcher ist BDE.

§. 55. Aufgab. Den Polygonswinkel eines regularen Vieleckes finden.

Aufl. Es sey der Polygonswinkel schon aufgezeichnet, wie ABC (61. *Fig.*), so beschreibe man durch die drey ge-

gegebenen Puncte A, B und C (§. 48.) die Zirkelperipherie ABCD, so wird der Bogen $AD = \frac{ADC}{2}$ das Maas des Polygonwinkels ABC seyn. (§. 39.)

Weil aber in jedem regularen Polygon alle Seiten einander gleich, so ist sowohl die Senne als der Bogen AB = BC.

Es ist aber auch AD = DC.

Daher o $AD + AB = DC + BC$ jedes ein halber Zirkel $= 180^{v}$.

Um also den Bogen AD zu finden, darf man nur die ganze Zirkelperipherie 360^{v} durch die Zahl der Seiten des Polygons dividiren, so ist der Quotient der Bogen AB. Wenn man nun diesen von dem halben Zirkel $= 180^{v}$ abzieht, wird der Rest der gesuchte Bogen AD, und das Maas des Polygonwinkels seyn. Wir sollen z. B. den Polygonswinkel eines Fünfeckes finden, so ist die Rechnung diese:

$$\frac{360^{v}}{5} = 72^{v}. \text{ Und } 180^{v} - 72^{v} = 108^{v}.$$

§. 56. Aufgabe. Die Summe aller Polygonswinkeln eines regularen oder irregularen Vieleckes finden.

Auflös. Jedes Polygon können wir aus einem innerhalb desselben willkührlich angenommenen Puncte O (62. *Fig.*) in so viel Dreyecke a, b, c, d, e, f, g, Theilen, so viel Seiten das Polygon hat.

Es hält aber jedes Dreyecke 180° (§. 22.) und die Centralwinkel, deren Summe = 360, gehören hier nicht her.

Um also die Summe der Polygonswinkeln zu finden, multiplicire man 180 mit der Zahl der Polygonsseiten, und von dem Producte zieh man 360 ab, so wird der Rest die gesuchte Summe seyn.

Wir sollen z. B. die Summe der Polygonswinkeln eines Siebeneckes finden, so ist die Rechnung folgende: 180 × 7 = 1260, und 1260 — 360 = 900.

Anmerk. Man wird das nämliche erhalten, wenn man 180 multiplicirt mit der Zahl der Polygonsseiten — 2. Denn 360 ist = 180 × 2. Ist also die Rechnung kürzer. 180 × 5 = 900.

§. 57. Weil in dem regularen Polygon alle Winkel einander gleich sind, wird man aus der be-

m kann-

kannten Summe aller Polygonswinkel die Größe eines jeden in Sonderheit finden, wenn man nur die Summe durch die Zahl der Polygonsseiten dividirt.

So ist z. B. der Polygonswinkel eines regularen Siebeneckes $= \frac{900}{7} = 128^{v} \frac{4}{7}$.

Anmerk. Diese Aufgaben sind sehr dienlich einen von uns oder andern gemachten Plan zu prüfen, oder auch was immer für ein Polygon zu beschreiben.

Es braucht dahero die Verfertigung oder Theorie sowohl, als die Anwendung folgender Tabelle keine weitere Erklärung.

Die Zahl der Seiten.	Die Summe aller Polygonswinkel.	Der Polygonswinkel.
III	180^{v}	60^{v}
IV	360	90
V	540	108
VI	720	120
VII	900	128 $\frac{4}{7}$
VIII	1080	135
IX	1260	140
X	1440	144

XI	1620	147 $\frac{3}{11}$
XII	1800	150
XIII	1980	152 $\frac{4}{13}$
XIV	2160	154 $\frac{2}{7}$
XV	2340	156
XVI	2520	157 $\frac{1}{2}$
XVII	2700	158 $\frac{14}{17}$
XVIII	2880	160
XIX	3060	161 $\frac{1}{19}$
XX.	3240	162

§. 58. **Aufgabe.** **Ein regulares Polygon innerhalb eines gegebenen Zirkels beschreiben.**

Aufl. Man dividire 360 durch die Zahl der Seiten des gegebenen Polygons. Der Quotient wird der Bogen AB (61. *Fig.*) seyn, die Senne dieses Bogens nun trage man auf der Peripherie des gegebenen Zirkels herum, so oft man kann: so werden die durch Sennen zusammgezogene Puncte das verlangte Polygon ausmachen.

§. 59. **Aufgabe.** **Ueber eine gegebene Linie AB (63. *Fig.*) ein regulares Polygon beschreiben.**

Aufl. 1. Suche man den Polygonswinkel, und übersetze ihn an dem Puncte B.

2. Mache man CB = AB.

3. Durch die drey Puncte A, B, C beschreibe man eine Zirkelperipherie, und trage AB so oft herum, als sichs thun läßt, so ist das gesuchte Polygon fertig.

§. 60. Lehrsatz. Wenn man ein regulares Sechsecke in einen Zirkel schreibt, ist die Seite AB (64. Fig.) jederzeit dem Radius AC gleich.

Beweis. Weil das Dreyeck ACB gleichschenkelicht, so ist der Winkel n = o. Es ist aber $m = 60^{v}$, weil der Bogen $AB = \frac{1}{6}$ von der ganzen Peripherie. Folglich ist $n + o = 120$, dahero $n = 60$ und $o = 60$. Es ist demnach das Dreyecke ABC gleichwinkelicht: folglich ists auch gleichseitig. w. z. e.

§. 61. Anmerk. Diese Aufgabe ist, einen Zirkel in seine Grad zu theilen, sehr dienlich. Man fährt mit dem Radius in der Peripherie herum, so hat man die Bögen von 60^{v}. theilt man diese entzwey, so hat man die Bögen von 30^{v}, und endlich wieder so, die Bögen von 15^{v}. Bey der übrigen Theilung muß der Fleiß, oder eine Schraubenmachine das ersetzen, was uns keine Geometrie lehret.

II. Abschnitt.

Von den ebenen Flächen.

§. 62. Eine ebene Fläche ist diejenige, auf welcher von jedem Puncte zum anderen eine gerade Linie kann gezogen werden.

I. Abhandlung.

Von den Eigenschaften der Flächen, die sie in Ansehung der Linien haben.

§. 63.

Es sey B e f d g ꝛc. (65. *Fig.*) eine optisch-entworfene Zirkelfläche. Man richte auf dieser eine senkrechte Linie A c auf, und ziehe B c so, daß sie mit A c eben auch einen rechten Winkel ausmache.

Wenn wir nun die Linie B c sich so um den Puncte c herum bewegen laßen, daß sie in jeder Lage e c, f c, d c, g c ꝛc. mit A c normal bleibe, bis sie in

ihre vorige Lage Bc zurücke kömmt, sehen wir schon, daß diese Linie die ganze Zirkelfläche BefdgmB in ihrer Bewegung beschrieben habe. Ac oder vielmehr (wenn sie auf der untern Seite des Zirkels verlängert wird) Ap heißet die Achse des Zirkels. Es steht demnach die Achse allenthalben auf den Zirkel senkrecht. Die ganze Fläche aber muß nothwendig eine gerade Fläche seyn, weil die Inclination der zwo Linien Bc und Ac jederzeit die nämliche bleibt. Wo wir dahero immer auf dieser Fläche eine gerade Linie no ziehen oder anbringen, wird diese jederzeit alle entzwischen liegende Stralen cf, cd, cg rc. durchschneiden, und folglich die Fläche mit allen ihren Puncten berühren.

§. 64. Diese kurze Betrachtung ersparet uns wieder eine Menge weitläufiger Beweise, und entdecket uns so von sich selbst manche Wahrheiten, deren Erkenntniß uns doch in unserer Geometrie unentbehrlich ist. Wir wollen nur die wichtigste davon hersetzen.

I. Wenn wir eine gerade Linie auf eine ebene Fläche, oder eine ebene Fläche auf die andere legen, werden alle Puncte der einten Fläche eben so viel Puncte der anderen, auf der sie lieget, berühren.

II. Eine

II. Eine jede Linie A C (66. *Fig.*) die auf einer ebenen Fläche senkrecht steht, in was immer für einem Puncte C machet mit allen Linien, die auf eben dieser Fläche durch C können gezogen werden, lauter rechte Winkel aus. Es stehen demnach alle vom C gleichweit abstehende Puncte b, d, e auch von jedem Puncte A der Linie A C gleichweit ab.

III. Dahero wenn zwo oder mehr Linien auf der nämlichen Fläche senkrecht stehen, werden sie miteinander parallel stehen.

IV Zween Puncte z. B. K und D (67. *Fig.*) sind nicht hinlänglich, die Lage einer ebenen Fläche zu bestimmen; denn sie könnte sich um die unbewegliche Linie K D krümmen. Wenn man aber nur den dritten Punct F zu Hilfe nimmt, ist die Lage der Fläche bestimmt.

V. Es stehen dahero jede drey Puncte, wenn sie nicht in einer geraden Linie fortlaufen, jederzeit in der nämlichen Fläche, und jedes Dreyecke ist eine ebene Fläche oder Figur.

VI. Wenn also was immer für eine Linie A C (68. *Fig.*) nur mit zwoen gegeneinander sich inclinirenden Linien b C und C D eine Perpendicularlinie

ausmacht, steht sie eben darum schon auch mit der ganzen Fläche senkrecht; denn man laße nur das Dreyecke bCD sich um den Punct C bewegen, so werden die Linien bC und CD die ganze Zirkelfläche durchlaufen, ohne jemal ihre Inclination oder ihren Winkel mit AC zu verändern.

II. Abhandlung.

Von den Eigenschaften der ebenen Flächen, die sie in Ansehung anderer Flächen haben.

§. 65. Fast alle Lehrsätze, die wie §. 5. in der ersten Abhandlung von den Linien erwiesen, gehören hieher, und müßen auch von den Flächen verstanden werden. Denn stellen wir uns nur eine unbewegliche Fläche ABCD (69. *Fig.*) vor, auf der eine andere abcd sich um die Linie ac als wie um eine Achse beweget, so werden wir in dieser Bewegung die nämlichen Wahrheiten entdecken, die wir oben von den Linien erwiesen; denn

I. Wenn eine Fläche abcd sich um eine andere herum beweget, oder eine andere schneidet, wird die

Summe

Summe der Winkeln, die sie beyderseits damit macht, jederzeit zween rechten Winkeln, oder 180° gleich seyn.

II. Wenn die bewegliche Fläche verlängert wird, so, daß sie auf der anderen Seite der Unbeweglichen durchlaufe, werden die Verticalwinkel, wie bey den Linien einander gleich seyn.

III. Wenn zwo oder mehr Flächen um eine gerade Linie herum laufen, wird die Summe aller Winkeln zusamm vier rechten, das ist 360° gleich seyn.

IV. Das Maas eines Winkels, den zwo Flächen miteinander ausmachen, bestimmt der Bogen eines Zirkels, der seinen Mittelpunct in der Linie a c hat, um welche die Fläche läuft, und dessen Radius auf die Linie a c senkrecht steht, wie a b, e f, oder c d.

§. 66. Wenn zwo parallellaufende Flächen von einer dritten wie immer durchschnitten werden, so finden hier wieder alle Lehrsätze, die wir von den parallellinien erwiesen, Platz. Denn

I. Werden die Wechselwinkel einander gleich seyn.

II. Wird der Aeußere dem Inneren auf der nämlichen Seite entgegengesetzten gleich seyn.

III. Werden die zween Innere auf der nämlichen Seite zween rechte Winkel, oder 180° miteinander ausmachen.

IV. Endlich werden alle Linien einander parallel seyn, in welchen zwo oder mehr parallellaufende Flächen von einer Dritten durchschnitten werden.

III. Abhandlung.

Von Ausmeßung und Vergleichung der Flächen untereinander.

§. 67. Eine jede vierseitige Figur wird ein Parallellogrammum (70. *Fig.*) genennt, wenn zwo Seiten derselben den zwo entgegengesetzten parallel sind. Sind überdas alle vier lauter rechte Winkel, wird es ein rechtwinkelichtes; und wenn auch alle vier Seiten einander gleich sind, ein Quadrat heißen. Sind alle vier Seiten gleich, nicht aber die Winkel, heißet die Figur ein Rhombus. (71. *Fig.*) wenn aber sowohl die Winkel, als die Seiten einander ungleich, wird sie Rhombois (72. *Fig.*) genennt.

Wenn

Wenn wir aus einem Winkel des Parallelogramms eine gerade Linie AD (70. *Fig.*) zum anderen entgegengesetzten Winkel ziehen, wird diese eine Diagonal benamset.

§. 68. Hieraus fließen nun folgende Lehrsätze von sich selbst.

I. In jedem Parallelogramm ABCD sind die entgegengesetzte Winkel $o + n$ und $m + r$ einander gleich.

Beweis. Weil AB und CD Parallellinien sind.

So ist $n = r$ (§. 13. n. II.)

Und $m = o$

Folglich ist $m + n = o + r$, und wenn wir beyderseits substit. ist $m + r = o + n$.

II. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonal AD in zwey gleiche Dreyecke getheilet.

Beweis. $n = r$

$m = o$

$AD = AD$.

Folglich ist das $\Delta ACD = \Delta ABD$. (§. 28. n. II.) w. z. e.

III. Es sind also in jedem Parallelogramm die sich entgegenstehende Seiten einander gleich, das ist, $AB = CD$ und $AC = BD$.

IV.

IV. Wir können demnach jedes Dreyecke ABC (73. *Fig.*) für die Hälfte eines Parallellogramms AdBC ansehen, welches auf der nämlichen Grundlinie BC stehet, und dessen entgegenstehende Linie Ad durch den obersten Winkel A des Dreyeckes läuft.

§. 69. Bilde man sich ein, es rucke in der nämlichen Figur durch unendlich kleine Bewegungen die Grundlinie BC ohne ihre Parallellage mit Ad zu verändern bis in Ad hinauf, so würde sie den ganzen Innhalt des Parallellogramms ABCd durchwandert, und beschrieben haben. Es ist also dieser Innhalt eben so vielen Grundlinien BC gleich, so viel Puncte, das ist, unendlich kleine Linien oder Höhen, in der Perpendicularlinie AB enthalten.

In geometrischer Sprache heißt diese Erklärung so: Es sey BC (74. *Fig.*) die Grundlinie eines Parallellogramms; AB die Höhe desselben. So ist der geometrische Ausdruck der *ganzen Zeit*, welche die Grundlinie BC verwendet, bis sie in Ad kömmt, = AB. Es sey also ferner $B1 = \frac{1}{\infty}$ das ist, wir können B1 für einen unendlich kleinen Theil dieser ganzen Zeit, und folglich auch für ein unendlich kleine Höhe

he eines Parallellogramms annehmen. Es würde also die Linie AB in der Zeit B 1 ein unendlich kleines Parallellogramm beschreiben, dessen Grundlinie die Linie BC selbst, und die Höhe unendlich klein seyn würde. Dieses unendlich kleine Parallellogramm aber ist eben nichts anders, als der unendlich kleine Raum, den die Linie BC selber durchläuft, da sie sich von einem Puncte der Linie AB zum anderen bewegt.

So bekömmt man nun also den ganzen Innhalt eines rechtwinkelichten Parallellogramms, wenn man die Grundlinie mit der Höhe desselben multiplicirt.

§. 70. Laßen wir jetzt die nämliche Grundlinie BC (75. *Fig.*) nicht mehr nach der Perpendicular AB, sondern nach der schiefliegenden Linie Bm sich hinaufrucken, doch so, daß sie ihren Parallelismus mit Ad oder mn nicht ändre, so wird sie in der nämlichen Zeit das schiefliegende Parallellogramm BC mn durchwandern, dessen Innhalt folglich dem vorigen gleich seyn wird, nämlich dem Producte, welches entsteht, wenn wir BC die Grundlinie mit der Perpendicularhöhe AB multipliciren. Und dieß ist jener in der Geometrie so wichtige, als oft vorkommende

Lehrsatz.

Lehrsatz. Die Parallellogramme, welche auf der nämlichen Grundlinie ruhen, und gleiche Höhen haben, sind einander gleich. Hier ist davon der geometrische

Beweis. Weil AD = BC
Und mn = BC

So ist AD = mn.
Folglich AD + Dm = Dm + mn.
Das ist Am = Dn.

Weil überdas AB = DC und Bm = Cn.
So wird das Dreyeck AmB oder x + y
gleich seyn dem Dreyecke DnC, oder y + z.
Das ist x + y = z + y.
Dahero x = z
Und endlich x + v = z + v.
Das ist ADBC = BmnC. w. z. e.

§. 71. Bilden wir uns ein, es nehme die Grundlinie BC (76. *Fig.*) immer in ihrer Bewegung gegen A gleichförmig, und in arithmetischer Progreßion ab, so, daß sie in A völlig verschwinde, so würde sie durch eine solche Bewegung das Dreyeck ABC beschreiben.

Um also den Innhalt eines Dreyeckes zu bestimmen, darf man nur alle Linien, die mit BC parallel können gezogen werden, in eine Summe bringen.

Das

Das ist, weil hier eine arithmetische Progreßion vorkömmt, darf man nur die Formel von S hernehmen,

$$S = \frac{an + \omega n}{2}$$ in welcher a = BC, n = AB und

$\omega = 0$. Und hiemit $S = \frac{an}{2}$ seyn wird (Allg. §. 74.)

Man bekömmt also den Innhalt eines jeden Dreyeckes, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe, oder die halbe Grundlinie mit der Höhe multiplicirt: oder endlich, wenn man die ganze Höhe durch die ganze Grundlinie multiplicirt, und das Product mit 2 dividirt.

§. 72. Jetzt werden wir uns um die Beweise folgender Lehrsätze nicht viel umzusehen haben, weil sie alle eitel Folgen der vorigen Betrachtungen sind.

I. Alle Parallellogramme sowohl, als die Dreyecke, die zwischen den nämlichen Parallelen stehen, und auf gleichen, oder den nämlichen Grundlinien ruhen, sind einander gleich.

II. Der Innhalt aller Parallellogramme haben untereinander ein aus den Höhen- und Grundlinien zusammengesetztes Verhältniß; denn sie sind lauter

Pro-

Producte, die aus der Multiplication der Höhen durch ihre Grundlinien entstehen. Dieß begreiflicher zu machen, sey die Höhe des Parallelogramms $M = A$
(77. Fig.) $m = a$

Die Grundlinie des Parall. $M = B$
$m = b$

So verhalten sich die Höhen wie $A : a$
Die Grundlinien wie $B : b$

Woraus das zusammengesetzte Verhältniß entstehet: $AB : ab$.

Es ist aber AB der Innhalt des Parallelogramms M, und ab der Innhalt des Parallelogramms m.

Dahero $M : m = AB : ab$. w. z. e.

III. Weil wir die Dreyecke als die Hälften der Parallelogramme ansehen können, stehen auch diese in dem nämlichen zusammengesetzten Verhältniße untereinander.

Denn es ist $\frac{AB}{2} : \frac{ab}{2} = AB : ab$.

IV. Die Parallelogramme sowohl, als die Dreyecke, deren Grundlinien einander gleich sind, verhalten

ten sich wie ihre Höhen untereinander: sind aber ihre Höhen gleich, verhalten sie sich wie ihre Grundlinien.

V. Wenn in zwey Dreyecken oder Parallellogrammen M und m die Höhe des erstern A sich zur Höhe des zweytens a, wie b die Grundlinie des zweyten zu B der Grundliniedes erstern verhält, so sind sie gleichen Innhalts. Nämlich,

Wenn A : a = b : B.

So ist AB = ab. Und folglich

VI. Wenn zwey Dreyecke oder Parallellogramme gleichen Innhalts sind; das ist, wenn AB = ab.

So wird A : a = b : B seyn.

VII. Wenn zwey Dreyecke oder Parallellogramme einander ähnlich sind: das ist, wenn sich ihre Höhen gegeneinander, wie ihre Seiten verhalten, so verhalten sich ihre Innhalte gegeneinander, wie die Quadrate ihrer, was immer für, correspondirender Seiten.

Erklärung. Es seyn, wie zuvor, die Dreyecke M, und m. Ihre Höhen A und a, ihre Grundlinien B und b.

Weil sie nun ähnlich sind, so müßen ihre correspondirende Seiten in Proportion stehen: das ist,

Es wird A : B = a : b seyn.

Und folglich A : a = B : b.

Es wird also AB : ab ein duplicirtes Verhältniß (Allg. §. 119.) seyn, und folglich $AB : ab = A^2 : a^2 = B^2 : b^2$.

Es ist aber $M : m = AB : ab$.

So ist denn auch $M : m = A^2 : a^2 = B^2 : b^2$ rc. w. z. e.

VIII. Weil jedes Parallellogramm durch die Diagonal in zwey, und jedes Polygon, oder Vieleck in mehr Dreyecke kann getheilet werden, werden jede zwey Polygone ein aus den Grundlinien und Höhen aller dieser Dreyecke zusammengesetztes Verhältniß untereinander haben, und wenn die Figuren ähnlich sind, werden sich ihre Innhalte wie die Quadrate der correspondirenden Seiten verhalten.

IV. Abhandlung.

Vom Innhalte des Zirkels.

§. 73. Wenn man in einem Zirkel zwo Stralen Cd (78. *Fig.*) und Cn unter was immer für einen Winkel an die Peripherie zieht, und die Senne dn durch die Perpendicularlinie Cr entzweyet, wird diese Senne um so mehr sich dem Mittel-

telpuncte C nähern, je größer der Winkel; und folglich wird die Perpendicular Co immer kürzer werden. Läßt man aber die zwo Stralen immer näher, und unter einem kleineren Winkel zusammenrucken, entfernet sich die Senne von dem Mittelpuncte C mehr und mehr, bis sie endlich $= \frac{1}{\infty}$, das ist, unendlich klein, und die Linie Co = Cr wird.

Was wir nun hier an einem einzigen Sector wahrgenommen, können wir uns aus dem nämlichen Grunde vom ganzen übrigen Zirkel vorstellen, der hierdurch in unendlich viele und kleine Dreyecke getheilet wird, welche alle den nämlichen Radius Cr für ihre Höhe haben, die Summe ihrer Grundlinien aber die ganze Peripherie des Zirkels seyn wird.

Wir können demnach einen jeden Zirkel als ein Polygon von unendlich vielen, und unendlich kleinen Seiten betrachten.

§. 74. **Lehrsatz.** Jeder Zirkel ist gleich einem Dreyecke dessen Höhe der Radius, und die Grundlinie die Peripherie des Zirkels ist.

Erklärung. Es seyen ab, bd &c. (79. *Fig.*) unendlich kleine Sennen, und zugleich die Grundli-

nien der Dreyecke a C b, b C d ꝛc. So wird C o die Höhe dieser Dreyecke = C a oder dem Radius gleich seyn, und folglich die Summe aller dieser Dreyecke den ganzen Innhalt des Zirkels ausmachen. Weil aber alle diese Dreyecke die nämliche Höhe C a, und die Summe der Sennen, oder die ganze Peripherie des Zirkels für ihre Grundlinie haben, so ist der ganze Zirkel m n d b a dem Dreyecke C d E gleich, dessen Grundlinie C E die Peripherie, und die Höhe C d der Radius des Zirkels ist. Wir werden nun keines weiteren Beweises mehr nöthig haben für folgende Aufgaben.

§. 75. **Aufgab.** Den Innhalt eines Zirkels finden.

Aufl. Man multiplicire den Radius des Zirkels mit der halben Peripherie, so ist das Product der gesuchte Innhalt. Um uns allgebraisch auszudrücken sey der Innhalt des Zirkels = C

Der Radius = R

Die Peripherie = P

So wird $C = \frac{PR}{2}$ die allgemeine Formel seyn.

§. 76. **Aufgabe.** Den Innhalt eines Sectors a m b c (80. *Fig.*) finden.

Aufl.

Aufl. Man multiplicire den Bogen amb, den die Schenkel des Sectors einschließen, durch den halben Radius, so ist das Product der gesuchte Innhalt.

Es sey der Sector = S
Der Bogen = a
Der Radius = r.

So ist wiederum $S = \frac{ar}{2}$ die Formel davon.

§. 77. **Aufgabe.** Den Innhalt eines gegebenen Segments ambo finden.

Aufl. Man suche 1. den Innhalt des Sectors aCbm. 2. Von diesen ziehe man den Innhalt des Dreyeckes aCb ab, so ist der Rest der gesuchte Innhalt.

§. 78. **Lehrsatz.** Die Peripherien aller Zirkeln stehen mit den halben oder ganzen Durchmessern in Proportion, und alle Zirkel sind einander ähnlich.

Erklärung. Es sey Cfg (81. *Fig.*) eines der unendlich kleinen Dreyecken, dessen unendlich kleine Grundlinie der Bogen fg des größeren Zirkels A. Wenn wir nun aus dem Mittelpuncte C noch einen anderen kleineren Zirkel B beschreiben, entstehet das

Dreyeck Cde, dessen Grundlinie der unendlich kleine Bogen de mit fg parallel seyn wird. Wir können dahero so folgern:

Cd : de = Cf : fg. (§. 31.)

Das ist: wie sich der Radius des kleineren Zirkels B zu seinen Bogen oder Grundlinie verhält, eben so verhält sich der Radius des größeren Zirkels A zu seinen Bogen oder Grundlinie. Und weil wir von allen diesen unendlich kleinen Dreyecken eben so schließen können, wird in jedem Zirkel der Radius zu seiner ganzen Peripherie, oder zur Summe aller dieser unendlich kleiner Grundlinien das nämliche Verhältniß haben.

Es sey des Zirkels A Peripherie = P
Des Zirkels B — — = p
Der Radius von A — — = R
von B — — = r
So haben wir folgende Proportion:

R : P = r : p.

§. 79. Man siehet also von sich selbst, daß alle Zirkel ähnliche Figuren seyn, in dem ihre correspondirende Seiten in Proportion stehen. Es verhalten sich aber die ähnlichen Figuren gegeneinander, wie die Quadrate ihrer correspondirenden Seiten, und

die

die Zirkel können für Dreyecke gehalten werden, deren eine Seite der Stral ist. Es ist demnach folgender Lehrsatz schon erwiesen.

Lehrsatz. Die Zirkelflächen verhalten sich gegeneinander, wie die Quadraten ihrer halben oder ganzen Durchmesser.

Es sey die Fläche eines größeren Zirkels = A
Sein Durchmesser = D
Die Fläche eines Kleineren = B
Sein Durchmesser = d

So haben wir wiederum folgende Proportion:

$$A : B = D^2 : d^2.$$

V. Abhandlung.

Anmerkungen über die Quadratur des Zirkels.

§. 80. Wir wissen zwar aus dem vorhergehenden Lehrsatze, daß sich der Radius eines jeden Zirkels zu seiner Peripherie verhalte, wie der Radius was immer für eines anderen Zirkels zu der seinigen; wie sich aber ein jeder Radius oder Durchmesser zu seiner Peripherie verhalte, dieß wissen wi-

noch nicht so genau, daß, wenn uns die Länge des Durchmessers in Zahlen bekannt ist, wir auch die Länge der Peripherie in Zahlen richtig bestimmen können. Es bleibt uns demnach der wahre Innhalt einer Zirkelfläche immer ein unbekanntes Räthsel, in dessen Auflösung schon manche alte und neue Mathematicker sich vergebens die Köpfe gebrochen. Die besten davon haben sich bemühet zu erweisen, daß die Quadratur des Zirkels, oder das wahre Verhältniß des Diameters zu seiner Peripherie in Zahlen bestimmen unmöglich sey. (Die Quadratur des Zirkels wird diese Aufgabe nur darum genennet, weil das Quadrat die allgemeine Maas der Flächen ist.)

§. 81. Gewiß ist, daß die gelehrte Welt, und besonders die Mathematick dem unverständigen Fleiß und der Müßiggangs vollen Arbeit desjenigen sauber gar nichts würde zu verdanken haben, der wider alles Vermuthen, so glücklich seyn sollte, diese unmögliche Quadratur durch neue Erfindungen zu bestimmen, und möglich zu machen.

§. 82. Wir sind wirklich der wahren Quadratur des Zirkels so nahe gekommen, daß wir gar nicht nöthig haben, auch in den wichtigsten Fällen, uns um eine genauere Bestimmung umzusehen.

Ludolph von Cölln hat sich dießfalls recht unbeschreibliche Mühe gegeben, und nach einer langen Rechnung gefunden, daß, wenn der Durchmesser = 1, die Peripherie größer sey, als

3, 14159265358979323846264338387950.

Aber kleiner, als

3, 14159265358979323846264338387951.

Daß also die Differenz zwischen beyden nur

$$\frac{1}{100000000000000000000000000000000}$$

betrage. Dahero man das Verhältniß des Diameters zu Peripherie sicher setzen könne, wie

1, 00000000000000000000000000000000 zu

3. 1415926535897932384626433838795.

Wer sieht aber nicht, daß man mit diesen ungeheuren Zahlen im Calculiren ohnmöglich fortkommen könnte?

Archimedes hat uns dieß Verhältniß des Diameters zur Peripherie in kleinern Zahlen ausgedrückt hinterlaßen, nämlich wie 7: 22. und man kann sich dessen noch wohl bedienen, wo eben nicht eine gar genaue Bestimmung nöthig ist.

Das aller genaueste aber in kleinen Zahlen, ist daß Verhältniß des Diameters zu Peripherie, dessen

findung wir dem Adrianus Metius einem Holänder zu verdanken haben, nämlich wie 113 : 355. beynahe; indem es von dem wahren Verhältniß kaum um $\frac{3}{10000000}$ unterschieden ist.

Weil uns nun dieß ziemlich genaue Verhältniß des Diameters zur Peripherie bekannt, können wir folgende Aufgaben ohne weiters Auflösen.

§. 83. Augabe. Aus dem gegebenen Diameter die Peripherie eines Zirkels finden.

Aufl. Man suche zu 113, 355, und den gegebenen Diameter die vierte Proportionalgröße, diese wird die gesuchte Peripherie seyn.

Es ist, zum B. der Durchmesser der Erde 1720 deutsche Meilen lang, man will hieraus den Umkreis der Erde wissen. So hat man folgende Proportion.

$$113 : 355 = 1720 : x$$

Das ist $a : b = c : x$.

So ist $x = \frac{bc}{a} = \frac{610600}{113} = 5403, 5398.$ rc.

§. 84. Aufgab. Aus der gegebenen Peripherie den Durchmesser finden.

Aufl.

Aufl. Man suche zu 355, 113, und der gegebenen Peripherie die vierte Proportionalgröße, diese wird der gesuchte Diameter seyn. Es hält z. B. der Umkreis des Mondes $1350 \frac{100}{113}$ man will hieraus die Länge seines Diameters in deutschen Meilen wissen. So hat man folgende Proportion:

$$355 : 113 = 1350,884 : x.$$

Das ist: $b : a = c : x.$

Dahero $x = \frac{ac}{b} = 429 . 7$

§. 85. **Aufgabe.** Den Quadratinnhalt einer Zirkelfläche finden, dessen Durchmesser, und Peripherie bekannt ist.

Aufl. Man multiplicire die Peripherie durch den vierten Theil des Diameters, so ist das Product der gesuchte Innhalt.

Es hält z. B. der Diameter eines Rondels in einem Gebäude 15 Schuh, man will wissen, wie viel Quadrat Schuh das ganze Rondel halte.

Aus diesem Diameter findet man die Peripherie $= 47,123$. Diese nun mit 15 multiplicirt, und das Product durch 4 dividirt, giebt

$$\frac{706,845}{4} = 176,711.$$

VI. Ab-

VI. Abhandlung.

Anhang einiger nutzlicher Aufgaben über die Rechnung und über die Wandelungen der Figuren.

§. 86. I. Aufgabe. Quadrate von gleicher Größe addiren, z. B. die Quadrate A und B. (82. *Fig*. n. 1.)

Aufl. Man ziehe die Diagonal c d, diese wird die Seite oder Wurzel des gesuchten Quadrates seyn, welches der Summe der gegebenen Quadraten A + B gleich seyn wird.

§. 87. II. Aufgabe. Zwey oder mehr Quadrate A, B, C (82. *Fig*. n. 2.) von ungleicher Größe addiren.

Aufl. Man setze e d und f g bey dem Puncte d (82. *F*. n. 3.) unter einem rechten Winkel zusamm, so wird die Diagonal e g die Seite eines Quadrates seyn, welches den zwey erstern gegebnen Quadraten A + B gleich ist. Richtet man nun aus dem Puncte g oder e auf die Linie e g eine Perpendicular g k auf, und macht g k = h m, so ist e k die Wurzel des gesuchten Quadrates, welches den drey gegebenen A + B + C gleich ist.

§. 88.

§. 88. III. Aufgabe. Zween gleiche Zirkel A und B (83. *Fig.*) addiren.

Aufl. Man ziehe die Stralen Ce und Cd, so wird ed der Radius des gesuchten Zirkels C (83. *Fig.* n. 2.) seyn, der der Summe der zwey gegebenen A + B gleich ist.

§. 89. IV. Aufgabe. Zween oder mehr ungleiche Zirkel C, m C, D n (83. *Fig.* n. 2, und 84. *Fig.* n. 1.) addiren.

Aufl. Den Radius des größten Zirkels C nehme man für die Grundlinie an, und richte an den Punct m oder C (84. *Fig.* n. 2.) eine Perpendicular auf, und mache C d = m C dem Radius des zweyten Zirkels, so wird die Hypothenuse m d der Radius eines Zirkels seyn, der den zweenen erstern C + m C gleich ist.

Setzt man nun den Radius D n des dritten Zirkels unter einen rechten Winkel an den Puncte d, so, daß E d = D n, so ist die Hypothenuse E m der Radius des gesuchten Zirkels K, (n. 3.) dessen Innhalt der Sume der drey gegebenen Zirkeln C+m C+D n gleich ist.

§. 90. V. Aufgabe. Zwey Quadrate M, N (85. *Fig.* n. 1.) voneinander abziehen.

Aufl. Man beschreibe über die Seite c d des größeren Quadrates einen halben Zirkel, und übersetze aus dem Puncte d die Seite e m des kleineren Quadrates

drates N in die Peripherie m, so wird cm die Seite des gesuchten Quadrates seyn, dessen Innhalt = M – N.

§. 91. VI. Aufgabe. Zween Zirkel R, P, (85. *Fig.* n. 2.) voneinander subtrahiren.

Aufl. Sie ist die nämliche: Man beschreibt über den Radius des größeren cd einen halben Zirkel, und übersetzet den Radius des kleineren aus dem Puncte d in die Peripherie m, so wird cm der Radius des gesuchten Zirkels seyn, dessen Innhalt = R — P.

§. 92. Anmerk. Weil der pythagorische Lehrsatz von allen regularen Figuren wahr ist, sieht man von sich selbst, daß auf eben diese Art nicht nur Quadrate und Zirkel, sondern auch Dreyecke, alle regulare Polygonen, und alle ähnliche Figuren oder Flächen voneinander können abgezogen, und unter eine Summe gebracht werden.

§. 93. VII. Aufgabe. Ein gegebenes Quadrat ABCD (86. *Fig.*) in arithmetischer Progression multipliciren.

Aufl. 1. Zieh die Diagonal AD, diese wird die Seite des gedoppelten Quadrates seyn.

2. Verlängere die Seite oder Grundlinie CD, und übersetze AD aus dem Puncte C in e, so ist Ae die Seite des dreyfachen Quadrates.

3. Ueber-

3. Uebersetzet man nun weiters Ae aus C in f, und Af aus C in g ꝛc. werden Af die Wurzel oder Seite des vierfachen, Ag die Seite des fünffachen Quadrates, und so weiters ohne Ende seyn; den die Quadrate werden immer, wie die Zahlen 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. ꝛc. in arithmetischer Progreßion fortwachsen.

§. 94. VIII. Aufgabe. *Ein Quadrat in geometrischer Progreßion multipliciren.*

Aufl. Verlängere die zwo Seiten des gegebenen Quadrates CA und CD (87. *Fig.*) nach Belieben.

2. Zieh die Diagonal AD, diese wird die Seite des gedoppelten Quadrates seyn.

3. Uebersetze AD aus C in i und e, so ist ie die Wurzel des vierfachen, und wenn man so fortfährt, wird kf die Seite des achtfachen, lg des sechszehnfachen Quadrates seyn, und so fort ohne Ende; denn die Quadrate werden immer wie die Zahlen, 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. ꝛc. in geometrischer Progreßion fortwachsen.

§. 95. I. Anmerk. *Eben so kann man auch die Zirkel in arithmetisch- und geometrischer Progreßion multipliciren, wenn man nur mit ihren Stralen so, wie mit den Seiten und Diagonalen der Quadrate verfährt, und jederzeit*

zeit die Hypothenuse auf die verlängerten Stralen übersetzet. Die einzige Betrachtung der Figur kann die Sache deutlich machen. A (88. n. 2. *Fig.*) stellet die geometrische B (n. 1.) die arithmetische Progreßion der Zirkeln vor.

II. Anmerk. Wie die Addition und Subtraction (§. 92.) so kann auch die Multiplication in allen regularen Polygonen, und ähnlichen Figuren vorgenommen werden.

§. 96. IX. Aufgabe. *Ein gegebenes Dreyecke* a b c (89. *Fig.*) *in mehr* (z. B. in 4.) *gleiche Theile abtheilen.*

Aufl. Man theile die größte Seite a c in die begehrten 4 Theile, und ziehe die Linien b 1, b 2, b 3. so ists geschehen, und sind alle 4 Dreyecke einander gleich, weil sie gleiche Grundlinien, und die nämliche Höhe haben.

Eine andere Auflösung. Man theile die größte Seite a b (90. *Fig.*) in die begehrten 4 Theile, wovon b d einer ist; wenn man also die Linie d c zieht, so wird das Dreyeck b c d oder x der vierte Theil vom ganzen seyn, nach der vorhergehenden Auflösung.

Wir därfen demnach das noch übrige Dreyeck a d c nur noch in drey gleiche Theile scheiden, so wird jeder ein Viertel des ganzen seyn.

Man

Man theile also die Seite a c in 3 gleiche Theile, wovon f c einer ist: wenn wir nun die Linie d f ziehen, so ist das Dreyeck $y = \frac{1}{3}$ vom Dreyecke a c d und eben darum auch $= \frac{1}{4}$ vom ganzen a b c.

Wir haben jetzt nur noch $\frac{2}{4}$ Theile zu suchen. Man theile dahero a d in zween gleiche Theile a e = e d, und ziehe die Linie e f, so ist sowohl z als v $= \frac{1}{2}$ vom Dreyecke a d f, und hiemit auch $= \frac{1}{4}$ vom ganzen a b c.

§. 97. Anmerk. Diese Theilungsart, ob sie schon die Vorige zum Grunde hat, ist sie doch bequemmer in gewissen Umständen, wo die Winkel sehr klein sind, oder der Umfang der Dreyecke nicht gar zu groß werden soll.

§. 98. X. **Aufgabe.** *Was immer für ein Parallellogramm aus einem gegebenen Puncte m (91. Fig.) in zween gleiche Theile abtheilen.*

Aufl. Man mache n S = m R, und ziehe die Linie m n, so ist S Q m n = R T n m, denn es ist

leicht zu erweisen, daß die $\triangle\triangle$ $x = y$, $z = w$, $P = V$, und folglich $x + V + Z = W + P + y$ sey.

§. 99. XI. **Aufgabe.** *Ein Parallelogramm ABCD (92. Fig.) in mehr (z. B. in 5) gleiche Theile abtheilen.*

Aufl. Man theile eine Seite AB in die begehrten 5 Theile. Durch die Theilungspuncte ziehe man mit AC oder BD parallellaufende Linien, so ists geschehen; denn alle diese Theile werden wieder kleine Parallelogramme seyn, die gleiche Grundlinien, und die nämliche Höhe haben.

§. 100. **Anmerk.** Hätten wir die Linie AB in solche Theil getheilet, die in arithmetisch- oder geometrischer Proportion stünden, würde das ganze Parallelogramm in eben solche Theile getheilet seyn.

§. 101. XII. **Aufgabe.** *Ein Scalenum (§. 15) abc (93. Fig.) in ein gleichschenklichtes Dreyecke verwandeln, welches den nämlichen Innhalt habe.*

Aufl. Man ziehe durch den Punct b eine mit der Grundlinie ac parallellaufende Linie ed.

2. Aus den Puncten a und c richte man die Perpendicularlinien ad und ce auf.

3. Thei-

3. Theile man die Linie e d in zween gleiche Theile, so ist d g = e g.

4. Ziehe man die Linien a g, c g, so ist das Δ a g c = Δ a b c, und a g = g c.

§. 102. XIII. Aufgabe. **Ein gleichschenklichtes Dreyeck Q R S (94. *Fig.*) in ein Parallelogramm gleichen Innhalts verwandeln.**

Aufl. 1. Aus R zieh man die Perpendicular R o auf die Grundlinie, und theile eben diese Linie R o in zween gleiche Theile in dem Puncte c.

2 Durch den Punct c ziehe man die mit Q S parallellaufende Linie m n.

3. Aus den Puncten Q und S richte man die Perpendicularlinien Q m und S n auf, so ist Q m n S = Q R S, weil das Dreyeck die gedoppelte Höhe hat, und auf der nämlichen Grundlinie Q S, wie das Parallelogramm stehet. Zu dem ist x = z. Dahero x + y = z + y, das ist Q m c o = Q R o, und so auch auf der andern Seite.

§. 103. XIV. Aufgabe. **Ein irregulares Viereck a b c d (95. *Fig.*) in ein Dreyecke des nämlichen Innhalts verwandeln.**

Aufl. 1. Zieh die Linie bd, (95. *Fig.*) und die ihr Parallel stehende ce.

2. Zieh von b zu e eine gerade Linie, so wird das Dreyeck abe dem Vierecke abcd gleich seyn; denn es ist das △ bcd = △ bed, weil beyde die nämliche bd zur Grundlinie haben, und zwischen den Parallelen bd, ce stehen.

§. 104. Anmerk. Fast auf die nämliche Art kann ein jedes irregulares Polygon in ein Dreyecke des nämlichen Innhalts verwandelt werden; und ist diese Aufgab in der practischen Geometrie bey vielen Umständen unentbehrlich.

§. 105. XV. Aufgabe. *Ein regulares Sechseck abcdef (96. Fig) in ein Parellelogramm gleichen Innhalts verwandeln.*

Aufl. Auf die Perpendicularlinien aq, und fp übersetze man die Linie og dreymal, und schließe die Figur mit qp, so ist das Parallelogramm afqp dem gegebenen Sechsecke gleich; denn jedes aus den kleinen drey Parallelogrammen, wie afvz ist doppelt so groß als eines der Dreyecken des Polygons. Das ist: afvz = aof + aob ꝛc.

§. 106. Anmerk. Wenn man ein Fünfeck in ein Parallelogramm verwandeln solle, muß die Li-

nie

nie og $2 + \frac{1}{2}$ mal auf die Perpendicularen aq und fp aufgetragen werden. Ueberhaupt wird sie bey jedes Polygons Verwandelung so oft aufgetragen, als die Hälfte der Dreyecken ausmacht, in welche das Polygon aus dem Mittelpuncte kann getheilet werden. Nun ist bey dem regularen Sechsecke diese Hälfte $= \frac{6}{2} = 3$, bey dem Fünfecke $= \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ ꝛc.

§. 107. XVI. Aufgabe. *Ein gegebenes Dreyeck abc (97. Fig.) in ein Parallellogramm des nämlichen Innhalts verwandeln.*

Aufl. Man schneide die Höhe des Dreyeckes ab entzwey in d, und mache mit ac und ad das Parallellogramm aced vollendes aus, so wird es dem gegebenen Dreyecke gleich seyn; denn es ist $x = y$, und folglich $x + z = y + z$.

§. 108. Anmerk. Schneidet man statt der Höhe die Grundlinie ac in d (98. Fig.) entzwey, und richtet auf ad mit der Höhe ab ein Parallellogramm auf, wird, wie zuvor, $adbe = abc$ seyn.

§. 109. Anmerk. Auf eben diese Art werden alle Gattungen der Dreyecke, auch ein Scalenum,

verwandelt, nur muß man jederzeit die Perpendicularhöhe nehmen: so ist z. B. das Parallellogramm rstu (99. *Fig.*) dem Dreyecke pqr gleich.

§. 110. **Anmerk.** Man kann aus den drey Seiten zur Grundlinie erwählen, die man will. Dahero kann man aus jedem Dreyecke mehr Parallellogramme, und aus jedem Parallellogramme mehr Dreyecke machen, welche alle gleichen Innhalts seyn werden.

§. 111. **Anmerk.** Wenn in der Arbeit selbst der Innhalt solcher verwandelten Flächen nicht eben gleich herauskömmt, muß der Fehler entweder im Maasgabe stecken, oder es hat an der genauen Arbeit gemangelt, oder es fehlt an beyden; da es ohnehin kaum möglich, einen so genauen Maasstab zu verfertigen, oder eine Figur jederzeit mit gleicher Genauigkeit zu entwerfen.

§. 112. XVII. **Aufgabe.** Ein gegebenes Parallellogramm abcd (100. *Fig.*) in ein Quadrat des nämlichen Innhalts verwandeln.

Aufl. Man suche zwischen der Grundlinie cd oder ab, und zwischen der Höhe des Parallellogrammes bd = be die mittlere Proportional fb (§. 35. IV.) diese wir die Seite oder Wurzel des gesuchten Quadrates seyn.

§. 113. XVIII. Aufgabe. Eine rhombusförmige Figur, oder Rhombois abcd (101. *Fig.*) in ein rechtwinkelichtes Parallelogramm verwandeln.

Aufl. 1. Man verlängere die Grundlinie ad.

2. Aus c und b ziehe man die Perpendicularlinien bn und cm, so wird nbcm = abcd seyn; denn es ist x = y, folglich x + z = y + z.

§. 114. Anmerk. Man sieht leicht, daß, wenn man einen Rhombus in ein Quadrat verwandeln will, man aus ihm zuvor ein Parallelogramm, hernach erst ein Quadrat machen müße.

§. 115. XIX. Aufgabe. Was immer für ein Polygon in ein Quadrat des nämlichen Innhalts verwandeln.

Aufl. 1. Man verwandle das Polygon in ein Dreyeck. (§. 103.)

2. Das Dreyeck in ein rechtwinkeliches Parallelogramm. (§. 107.)

3. Das Parallelogramm in ein Quadrat. (§. 112.)

§. 115. XX. Aufgabe. Einen Zirkel (102. *Fig.*) in ein Dreyecke des nämlichen Innhalts verwandeln.

Aufl. Man verfertige ein Dreyeck, dessen Grundlinie A b der Peripherie des Zirkels gleich sey, die Höhe aber der Radius A c, so wird das Dreyeck der gegebenen Zirkelfläche fast gleich seyn.

Siehe hierüber den §. 74.

§. 117. Die Zirkelfläche in ein Parallelogramm gleichen Innhalts zu verwandeln, darf man nur die halbe Peripherie $\frac{Ab}{2} = Am$ mit dem Radius A o multipliciren, das ist, aus A m und A o ein Parallelogramm verfertigen, so ist A o m n = der Zirkelfläche gleich.

Macht man nun aus diesem Parallelogramm ein Quadrat (§. 112.) wird das Quadrat der Zirkelfläche beynahe gleich seyn.

§. 118. XXI. Aufgabe. *Ein Ellipse ABCd, (103. Fig. n. 1.) oder Oval in einen Zirkel des nämlichen Innhalts verwandeln.*

Aufl. Man suche zwischen der größeren Achse CD, und der kleineren A B die mittlere Proportionallinie d e (n. 2.); diese wird der Diameter m n (n 3.) des gesuchten Zirkels seyn. Wir werden vieleicht den Beweis davon im zweyten Theile anbringen.

§. 119.

§. 119. XXII. Aufgabe. Was immer für ein gegebenes Polygon in so viel gleiche Theile abtheilen, als man begehrt. Z. B. Es haben drey Burger ein Stück Felde geerbt: sie laßen es abmessen, und den Plan aufnehmen, den das Polygon ABCDE (104. *Fig.*) vorstellt. Sie wollen nun dieses Felde in drey gleiche Theile getheilt wissen.

Aufl. 1. Zieh die Diagonalen BC und BE, so ist das Polygon in drey ungleiche Dreyecke getheilet.

2. Suche den Quadratinnhalt eines jeden Dreyeckes in Sonderheit. (§. 71.) Die Summe aller dreyen wird der Innhalt des ganzen Polygons seyn.

3. Diese Summe theile durch die Zahl der begehrten Theile: hier durch 3, so wird der Quotient $\frac{1}{3}$ des ganzen Polygons seyn.

4. Vergleiche nun diesen gefundenen Quotienten mit dem Dreyecke ABC durch die Subtration. Der Rest wird den Innhalt eines anderen Dreyeckes geben.

5. Ist das Dreyecke ACB größer als das gefundene $\frac{1}{3}$, so wird der Rest von ACB abgezogen. Ist aber ACB kleiner, so wird der Rest addirt.

 6. Eben

6. Eben so mache es mit dem BCE ꝛc. So ist die Theilung fertig.

§. 120. Nun fragt sich aber, wie diese Theilung auf dem Plan, und Felde selbst vorzunehmen? Ein Beyspiel soll die Sache deutlich machen.

Auf meinem Maasstabe findet sich im △ ABC die
Grundlinie BC = 248.
Die Höhe Am = 88.

Im Dreyecke BCE findet sich die
Grundlinie BC = 248.
Die Höhe Eo = 189.

Im Dreyecke BDE findet sich die
Grundlinie BE = 253.
Die Höhe Dn = 66.

Es ist also der Innhalt des

$$\triangle ABC = \frac{248 \times 88}{2} = 10912.$$

$$\text{Des } \triangle BCE = \frac{248 \times 189}{2} = 23436.$$

$$\text{Des } \triangle BDE = \frac{253 \times 66}{2} = 8349.$$

Dahero

Dahero der Innhalt des ganzen Polygons, oder die Summe aller dreyen = 42697.

Um also den dritten Theil zu erhalten, müßen wir den ganzen Innhalt durch 3 dividiren.

Es ist aber $\frac{42697}{3} = 14232\frac{1}{3}$.

Nun sehen wir, daß der Innhalt des Dreyeckes ABC kleiner, als der dritte Theil sey, und zwar, wenn wir die Subtraction vornehmen, um $3320\frac{1}{3}$.

Wir müßen demnach ein Dreyeck finden, dessen Innhalt = $3320\frac{1}{3}$, und es zum vorigen addiren.

Weil uns aber die Grundlinie BC = 248 schon bekannt, dörfen wir nur die Höhe rs suchen, die wir leicht finden, wenn wir den ganzen Innhalt unsers Dreyeckes durch die halbe Grundlinie dividiren.

Nämlich $\frac{3320\frac{1}{3}}{124} = 26\frac{280}{372}$ beynahe. Jetzt können wir das Dreyeck auf die Grundlinie BC setzen, und wird ABC + BCs der dritte Theil des ganzen Polygons seyn.

Es

Es ist aber das Dreyeck BDE auch kleiner, als der dritte Theil, und zwar um $5883 \frac{1}{3}$, so müßen wir ein Dreyeck dieses Innhalts finden, und weil die Grundlinie BE = 253, müßen wir, um die Höhe unsers Dreyeckes zu finden den Innhalt $5883 \frac{1}{3}$ durch 253 dividiren, und den Quotienten halbiren.

$\frac{5883\frac{1}{3}}{253} = 23. \frac{193}{759}$ Wenn wir nun diesen Quotienten halbiren, bekommen wir für die Höhe tu

$11. \frac{476}{759} = 11, 6272.$

Dahero BDE + Btu (104. *Fig.*) wieder der dritte Theil, folglich auch Bts der dritte Theil des ganzen Polygons ist. Es wird also der in drey gleiche Theile getheilte Plan so, wie die 105. Figur, aussehen.

Anmerkung. Will man die kleinen Dreyecke Brs und But (104. *Fig.*) in andere, oder in Parallellogramme gleichen Innhalts verwandeln, bekömmt der Plan ein ganz anderes Aussehen, nachdem es nämlich die Umstände, die Lage, oder Besitzer fordern, oder zulaßen, wie z. B. *F.* 106.

III. Ab-

III. Abschnitt.

Von den dichten Körpern.

I. Abhandlung.

Vorläufige Erklärungen.

§. 121.

Wir haben bishero verschiedne Flächen nicht anderst betrachtet, als wäre jede in Sonderheit aus einer gewissen Bewegung einer bestimmten Linie entstanden. (§§. 65. ꝛc.) Nun wollen wir auch die verschiednen Körper eben so ansehen, als entstünden sie aus einer gewissen Bewegung einer bestimmten Fläche.

§. 122. Einen dichten Körper nennen wir eine jede Größe, welche lang, breit, und tief, oder hoh ist. Es bestehet demnach ein solcher Körper aus der Summe unendlich dünner Flächen, welche so viel an der Zahl sind, als sich Puncte in der Linie befinden, welche das Maas des von der Mutterfläche beschrie-

benen

benen Weges ist, da sie den Körper durch ihre Bewegung hervorgebracht. Diese unendlich dünne Flächen werden die Elemente der Körper genennt.

Diese Elementen sind zwar nicht nur mathematische Flächen, die keine Höhe oder Tieffe haben: nein; sie sind Körper; weil sie aber unendlich dünn, können wir sie für pure Flächen ansehen, wie wir oben von den Puncten der Perpendicularlinie geredet.

Anmerkung. Um einem Anfänger begreiflich zu machen, wie verschiedne Körper aus der Bewegung ihrer Mutterflächen entstehen, laße man eine kleine Maschine von einem Uhrmacher verfertigen, die auf einem aufrecht stehenden Triebe bestehet, der durch ein Kronrädchen und eine unten angebrachte Feder schnell um seine Achse getrieben wird. Oben muß der Trieb eine vier- oder dreyeckichte Oeffnung haben, damit man verschiedne Dinge aufstecken könne; oder man mache oben eine kleine gesiderte Oeffnung, worinn ein Meßing oder Kartenblättchen fest angesteckt werden kann.

Will man die Maschine eben nicht so kostbar machen, braucht es mehr nicht, als daß man zwischen 2 Brettern ein Rad A (107. *Fig.*) und eine Rolle B so anbringe, daß durch die Bewegung des Rades, da um beyde eine Schnur, wie bey einer Drehbanke, gezogen, auch die Rolle um desto geschwin-

schwinder umlaufe, je kleiner sie gegen den Rade ist. In B aber steckt man die Grund- oder Mutterflächen auf.

Wir können aber durch eine solche Maschine nur jene Körper vorstellen, die durch eine Zirkelbewegung entspringen. Bey den anderen, die durch eine geradlinichte Bewegung gezeugt werden, muß freylich die Einbildungskraft das beste thun. Wir wollen nun den Anfang unserer geometrischen Betrachtungen machen.

§. 123. Es sey ABCD (108. *Fig*) ein optisch entworfenes Quadrat: DAE sey ein rechter Winkel, und AE = AD. Bilden wir uns jetzt ein, das ganze Quadrat bewege sich in seiner unveränderlichen Horizotallage aus A bis in E herab, so wird jede Seite ein Quadrat beschreiben, welches dem vorigen ABCD gleich seyn wird, und eben dieses Quadrat, welches zuvor die oberste Fläche, oder der Anfang des Körpers war, wird die unterste seyn; und wird also ein Körper entstehen, den wir einen Cubus, oder Würfel nennen, wie ABCDEFG. (109. *Fig.*)

§. 124. Aus dieser Betrachtung können wir ohne weiters folgende Sätze ziehen.

I. Die

I. Die Oberfläche eines Würfels bestehet in 6 Quadraten, die alle einander gleich sind.

II. Wo wir immer einen Würfel so durchschneiden, daß der Schnitt mit der Grundfläche parallel läuft, wird jederzeit die abgeschnittene Fläche der Grundfläche gleich seyn.

III. Weil in jedem Würfel alle 6 Quadratflächen einander gleich, und eine jede für die Grundfläche kann angenommen werden, sind alle mit was immer für einem Quadrate des Würfels parallellaufende Sectionen, oder Abschnitte einander gleich.

§. 125. Bilden wir uns ein, das ganze Parallelogramm ABCD (110. *Fig.*) bewege sich von A bis in E, ohne die rechten Winkel, welche die Linien AD und BA mit AE machen, zu verändern, so wird jede Seite ein Parallellogramm beschreiben, welche alle die Linie AE zur Höhe, und eine aus den 4 Seiten der obersten Fläche zur Grundlinie haben. Die oberste Fläche ABCD aber, wird der untersten gleich seyn. Der Körper, den diese Fläche durch ihre so bestimmte Bewegung erzeuget, nennt sich ein Parallelepipedum. Hieraus folgen die nachkommenden Sätze.

I. Die

I. Die Oberfläche eines Parallelepipedums macht eine Summe von 6 Parallelogrammen aus, deren jede zwey entgegengesetzte einander gleich sind.

II. Wo wir immer diesen Körper so durchschneiden, daß die Section mit der Grundfläche parallel läuft, werden zwo Flächen entstehen, die der Grundfläche gleich sind.

III. Weil jede Fläche für die Grundfläche kann angenommen werden, hat der obige Satz von jeder Seite des Parallelepipedums seine Richtigkeit.

IV. Es sind also die Sectionen, die einander parallel sind, auch einander gleich.

§. 126. Bilden wir uns ein, eine geradlinichte Figur oder Fläche bewege sich in ihrer unveränderlichen Horizontallage (z. B. das Dreyeck ABC) (111. *Fig.*) aus A in D herab, so wird jede Seite des Dreyeckes ein Parallelogramm beschreiben, wie ACDE rc. und die Grundfläche DEf der obersten Mutterfläche ABC gleich werden. Der auf diese Art gezeugte Körper wird ein Prisma benamset.

Man sieht von sich selbst, daß I. ein jedes Prisma so viel Parallelogrammen in seinem Umfange ha-

ben müße, so viel wir Seiten an der Mutterfläche zehlen. Ist diese ein Dreyeck, wird das Prisma drey, ists ein Viereck, vier, ists ein Fünfeck, fünf Parallelogramme, und so weiter, in seinem Umfange begreifen.

II. Es ist demnach der Cubus, ja ein jedes Parallelepipedum ein Prisma, und was wir von den Sectionen der zwey ersteren gemeldet, hat auch von jedem Prisma seine Richtigkeit.

III. Die ganze Oberfläche eines jeden Prisma bestehet aus der Summe so vieler Parallellogrammen als die Mutterfläche Seiten hat, und der gedoppelten Mutterfläche selbst.

§. 127. Wenn sich die Mutterfläche nicht senkrecht, sondern nach der Direction einer schiefliegenden Linie AE (112. *Fig.*) beweget, wird durch diese Bewegung ein schiefliegendes Prisma gezeugt.

§. 128. Die Linie Bf, die durch das Mittel aller Elemente eines schief- oder aufrechten Prisma gehet, wird die Achse des Prisma genennt.

§. 129. Aus was immer für einen Puncte der Mutterfläche aber man eine Perpendicularlinie auf die ent-

entgegengesetzte, und, wenn es vonnöthen, verlängerte Fläche zieht, wird diese die Höhe des Prisma bestimmen.

§. 130. Es ist folglich die Höhe eines aufrechten Prisma jederzeit der Achse gleich. In einem Schiefliegenden aber wird die Höhe um so viel kleiner seyn, je kleiner der Winkel ist, den die Achse mit der Grundfläche macht.

§. 131. Die Höhe eines jeden Körpers, der aus parallellaufenden Elementen bestehet, bestimmet zugleich die Zahl der Elementarflächen, die den ganzen Körper ausmachen.

Erklärung. Diese Höhe bestimmet die Entfernung der obersten Fläche von der Untersten. Es können also zwischen diesen zwo Flächen ohnmöglich mehr Elementarflächen, als Puncte in jener Linie seyn, welche den Abstand der obersten Fläche von der Untersten bestimmt. Dahero die Zahl dieser Puncte der Zahl der Elementarflächen jederzeit gleich ist.

Wir werden es hiemit leicht begreifen, wenn wir weiter unten in den Aufgaben sagen werden, daß um den cubischen Innhalt eines solchen Körpers zu finden

mehr nicht vonnöthen sey, als daß wir die Grundfläche durch die Höhe multipliciren.

§. 132. Bilden wir uns ein, das ganze horizontalliegende Polygon abcdef (113. *Fig.*) bewege sich nach der Direction der senkrechten oder schiefliegenden Linie dM so hinauf bis in o, daß die Seiten des Polygons immerzu in einer arithmetischen Progreßion abnehmen, wie die Zahlen 4, 3, 2, 1, 0, wenn wir die Differenz ab — mn ꝛc. $= \frac{1}{\infty}$ setzen, das ist, für unendlich klein annehmen, haben wir diese arithmetische Progreßion $\frac{1}{\infty}, \frac{1}{2\infty}, \frac{1}{3\infty}, \frac{1}{4\infty}, \ldots \frac{1}{\infty\infty}$ ꝛc. und heißet der Körper, der durch diese Bewegung entstehet, eine Pyramide, wovon o die Spize, das Polygon abcdef aber die Grundfläche ist.

§. 133. Man nimmt in dieser Betrachtung leicht wahr, daß eine jede Seite der Mutterfläche, wie ab, oder bc ein Dreyeck beschreibe (§. 71.) nämlich aob, boc ꝛc.

§. 134.

§. 134. Dahero überhaupt eine Pyramide ein dichter Körper ist, dessen Grundfläche ein Polygon, die Seiten aber Dreyecke sind.

§. 135. Was wir oben von dem Prisma (§. 128. 129. ꝛc.) die Achse und die Höhe betreffend erinnert haben, ist eben so von der Pyramide zu verstehen.

§. 136. Man siehet ohne meine Erinnerung, daß es so viele unterschiedne Gattungen der Pyramiden geben könne, als der Polygonen, weil wir jedes deren als eine Mutterfläche einer Pyramide ansehen können. Es giebt also drey= vier= fünf= sechseckichte ꝛc. Pyramiden, nachdem das Polygon, woraus sie entstehet, drey= vier= fünf ꝛc. Ecke oder Seiten hat.

§. 137. Bilden wir uns ein, das Polygon abcdef (114. *Fig.*) komme in seiner Bewegung nicht weiter als bis in M, wo es stehen bleibt, bevor die Seiten ab, bc ꝛc. gar verschwinden, welches erst in dem Puncte o geschehen würde, so haben wir aus dieser Bewegung den Begriff einer gestümmelten Pyramide.

§. 138. Jetzt wollen wir verschiedne Flächen auf unsere Maschine aufstecken, und über ihre Bewegung unsere Betrachtungen machen.

§. 139. Wenn wir die halbe Zirkelfläche ABC (115. *Fig.*) aufstecken, und das Rad in Bewegung setzen, wird uns diese eine Kugel, oder Sphäre durch ihre schnelle Bewegung gestalten.

Es ist demnach die Sphäre ein Körper, in welchem alle Puncte seiner Oberfläche von einem inneren Puncte m, der sich Centrum oder den Mittelpunct nennet, gleichweit abstehen.

Eine jede gerade Linie, die durch den Mittelpunct der Sphäre läuft, und sich beyderseits in der Oberfläche endiget, kann für die Achse angenommen werden. Es sind dahero alle Achsen der *nämlichen* Sphäre einander gleich. Es brauchen also folgende Sätze keinen Beweis mehr.

I. *Wo immer eine Sphäre durch eine ebene Fläche durchschnitten wird, wird die Section jederzeit eine Zirkelfläche seyn.*

II. Die *Elemente* einer Sphäre sind lauter unendlich dünne Zirkelflächen, oder Cylinder, die alle gleiche, aber unendlich kleine Höhen haben, und deren Durchmesser immer ab- und zunehmen, wie die Sennen M p. (116. *Fig.*)

III. Der

III. Der größte Zirkel einer Sphäre ist also derjenige, der für seinen Mittelpunct den Mittelpunct der Sphäre hat. Alle übrigen werden kleinere Zirkel genennt.

§. 140. Wenn wir das Parallelogramm ABCd (117. *Fig.*) so auf unsere Maschine setzen, daß es sich um die Seite Bd bewege, wird es durch seine Bewegung einen Cylinder vorstellen, dessen Achse die unbewegliche Linie Bd seyn wird. Eben diese, wenn der Cylinder aufrecht stehet, wird auch seine Höhe bestimmen. Seine Grundfläche wird ein Zirkel seyn, dessen Mittelpunct in der Achse Bd, und der Radius = Cd, oder diejenige Seite des Parallelogramms seyn wird, die im aufrechten Cylinder auf der Achse senkrecht stehet.

Es sind demnach alle Sectionen, die mit der Grundfläche des Cylinders parallel laufen, einander gleich.

§. 141. Wenn wir das rechtwinkelichte Dreyeck ABC (118. *Fig.*) auf unserer Maschine so anbringen, daß sich das Dreyeck, um die Seite AB bewege, wird sich uns ein Conus, oder Kegel vor Augen stellen, dessen Achse die Seite AB seyn wird. Die Hypothenuse AC wird in dieser Bewegung die

 ganze

ganze Oberfläche, die dritte Linie BC aber einen Zirkel beschreiben, den der Kegel für seine Grundfläche hat.

Es stehet demnach der oberste Punct A eines Kegels von allen Puncten, welche die Peripherie der Grundfläche ausmachen, gleichweit entfernet.

II. Abhandlung.

Von den dichten Vielecken.

§. 142. Ein dichter Winkel entstehet, wenn die Spitze von mehr flachen gegeneinander geneigten Winkeln in dem nämlichen Puncte zusammen kommen. Solche dichte Winkel sind die Spitze aller Pyramiden, die Ecke eines Prisma rc.

§. 143. Gleiche dichte Winkel sind es, wenn in einem so viel als in dem anderen Flachewinkel, und die correspondirenden Winkel einander gleich sind.

§. 144. Wie wir uns flache Winkel zumeßen, des Zirkels, so müßen wir uns, um das Maas eines dichten Winkels zu bestimmen, der Sphäre bedienen,

nen, und einbilden, es befinde sich der Spitz des dichten Winkels eben im Mittelpuncte der Sphäre, so wird ein jeder flacher Winkel, woraus der Dichte bestehet, sich auf der Fläche des größten Zirkels befinden, und sein Maas wird der Bogen seyn, dessen Senne die Grundlinie des flachen Winkels ist. Die Summe denn aller solcher Bögen wird das Maas des dichten Winkels seyn.

§. 145. **Aufgabe. Einen dichten Winkel messen.**

Aufl. Man messe jeden flachen Winkel in Sonderheit, die Summe wird das Maas des dichten Winkels seyn, der **wenigstens aus 3 Flachen entstehen muß.**

Lehrsatz. Das Maas eines dichten Winkels muß nothwendig kleiner als 360° seyn: sonst müßten sich die flachen Winkel alle in der nämlichen Zirkelfläche befinden, wenn ihr Summe = 360° wäre, und würde also nie ein dichter Winkel entstehen.

§. 147. **Lehrsatz. Ein dichtes Vieleck muß wenigstens aus vier Flächen bestehen, sonst würde der Körper nicht geschlossen.**

§. 148. **Lehrsatz.** Ein dichtes Vieleck kann nicht weniger, als vier dichte Winkel haben; denn ein dichter Winkel muß wenigstens 3 Flächen haben; diese aber können wir durch die vierte ohnmöglich schließen, ohne zugleich drey neue dichte Winkel zu gestalten.

§. 149. Unter den dichten Vielecken werden nur jene regulare genennt, die aus regularen, und gleichen Flächen bestehen.

Es kann demnach nicht mehr als fünf regulare dichte Vielecke geben, nämlich ein dichtes Viereck (*teträëdrum*) welches aus vier gleichen, und gleichseitigen flachen Dreyecken bestehet. 2. Das *octäëdrum*, oder dichte Achteck, welches aus acht flachen gleichen und gleichseitigen Dreyecken bestehet. 3. Das *Icosäëdrum*, oder dichte Zwölfeck, welches aus zwainzig flachen, gleichen, und gleichseitigen Dreyecken bestehet. 4. Das *dodecäëdrum*, oder dichte Zwainzigeck, welches aus zwölf flachen regularen, und gleichen Fünfecken bestehet. 5. Das *hexäëdrum*, der Würfel, oder Cubus, der aus sechs gleichen Quadraten bestehet.

§. 150. Dieß zu erweisen darf man nur die eben vor beygebrachte Lehrsätze ein bischen überlegen.

Einen

Einen dichten Winkel zu gestalten, hat man wenigst drey Flächen nöthig; wenn aber deren Summe nicht kleiner ist, als $\overset{v}{360}$, kann kein dichter Winkel daraus werden. Nun aber sind alle übrigen Polygonswinkel so groß, daß drey zusamm die Zahl $\overset{v}{360}$ ausmachen, wie der Hexagonwinkel, oder, wie alle nachkommenden, übertreffen. So ist z. B. der Octogonwinkel = $\overset{v}{135}$, und folglich machen ihrer drey $\overset{v}{405}$ woraus ja kein dichter Winkel entstehen kann. (§. 146. 147. rc.)

Anmerk. Einem Anfänger ist hier nichts nöthiger, als daß er der gleichen aus starken Papier verfertigte dichte Vielecke vor sich habe, und selbst nachzumachen sich Mühe gebe. Friderich Penther in seiner Praxi geometr. C. III. giebt hierüber deutlichen Unterricht.

III. Abhandlung.

Von Ausmeßung der dichten Körper, und ihrer Oberflächen.

§. 151. Die ganze Oberfläche eines jeden Körpers ist gleich der Summe aller Seiten- und Grundflächen, die den Körper umgeben.

§. 152. Der dichte Innhalt eines Körpers ist eigentlich nichts anders, als der Raum, den ein Körper einnimmt, und dieser ist jederzeit der Summe aller Elementen des Körpers gleich.

Nun wollen wir die Oberflächen sowohl, als den dichten Innhalt der Körper durch etwelche Aufgaben messen lernen.

§. 153. Wie wir, um ebene Flächen auszumessen uns des Quadrats bedienet, so nehmen wir für das gemeine Maas der Körper den Cubum an. Wenn ich also z. B. sage: der Innhalt dieses oder jenes Körpers ist = 100 Schuh, ist es eben so viel gesagt, als: dieser Körper nimmt einen Raum ein, den man genau mit 100 Cubis, oder Würfeln ausfüllen kann, deren jeder einen Schuh lang, breit, und hoh ist.

§. 154.

§. 154. I. Aufgabe. Die ganze Oberfläche, und den dichten Innhalt eines Cubus, oder Würfels finden.

Aufl. Weil der Cubus aus sechs gleichen Quadraten bestehet, darf man nur den Innhalt eines dieser Quadraten durch die Zahl 6 multipliciren, so wird das Product die ganze Oberfläche des Würfels geben.

Multiplicirt man aber eines dieser Quadrate wieder durch seine Wurzel, oder durch die Seite des Cubus, bekömmt man fürs Product den gesuchten dichten Innhalt des Würfels.

Diese Auflösung hat keines weiteren Beweises nöthig, wenn wir nur bedenken wollen, daß so rechnen eben so viel heiße, als die Grundfläche des Cubus durch seine Höhe multipliciren. Gleichwie wir nun den Quadratinnhalt eines Parallellogramms erhalten, wenn wir die Grundlinie durch die Höhe multipliciren, so erhalten wir den cubischen Innhalt des Würfels, wenn wir die ganze Grundfläche, oder das ganze Quadrat durch die Höhe des Würfels multipliciren.

Es sey z. B. die Seite AB = 6. Zoll.

So

So ist $AB^2 = 6^2 = 36$. die Grundfläche.

$AB^3 = 6^3 = 216$. der cubische Innhalt.

Anmerk. In diesem Falle, wo wir die Seite des Cubus eben in 6 Zoll getheilet, ist auch die ganze Oberfläche $= 216''$, aber Quadratzoll.

Theilen wir die Seite AB in $10''$ Zoll.

So ist $AB^2 = 100''$.

Und also die Oberfläche $= 600''$. Quadratzoll.

Der cubische Jinnhalt $= 1000''$. Cubiczoll.

§. 155. Weil nun eine geometrische Ruthe $10'$ Schuh, ein Schuh $10''$ Zoll, und ein Zoll $10'''$ Linien ausmachet, enthält eine Quadratruthe $100'$, ein Schuh $100''$, ein Zoll $100'''$ im Quadrate.

Eine Cubicruthe aber enthält $1000'$ dichte, oder Cubicschuh, ein Schuh, $1000''$ Cubiczoll, ein Zoll $1000'''$ Cubiclinien.

§. 156. Wenn man dahero eine Zahl, die den Quadratinnhalt einer Fläche ausdrücket, in Ruthen,

Schuh,

Schuh, Zoll und Linien abtheilen will, darf man nur über die letzte Zahl das Zeichen derjenigen Größe schreiben, in die man die Fläche getheilt hat, und weiter fort von der Linken zur Rechten nach jeden zwey Ziffern ein neues gehöriges Zeichen setzen.

Man hat z. B. für den Quadratinnhalt eines Parallellogramms, oder Dreyeckes erhalten 32597 Zoll, so haben wir $\overset{v}{3}2\overset{\prime}{5}9\overset{\prime\prime}{7}$, das ist 3 Ruthen, 25 Schuh, 97 Zoll ꝛc.

§. 157. Will man eine Zahl, die den Cubic-Innhalt eines Körpers ausdrücket, in Cubicruthen, Schuh, und Zoll abtheilen, darf man nur, von der Rechten zur Linken, jederzeit nach drey Zahlen die gehörige Zeichen darüber setzen.

Man erhält z. B. für den Cubic-Innhalt eines Körpers 12167 Zoll, so hat man $1\overset{\prime}{2}16\overset{\prime\prime}{7}$, das ist 12 Schuh, 167 Zoll, welche ja noch keinen Cubicschuh ausmachen.

Oder man erhält 36456789352 Linien, so hat man $3\overset{v}{6}45\overset{\prime}{6}78\overset{\prime\prime}{9}35\overset{\prime\prime\prime}{2}$, das ist 36 Ruthen, 456 Schuh, 789 Zoll, 352 Linien.

Anmerk.

Anmerk. Man siehet schon hieraus von sich seblst, wie viel bequemlicher unsere Decimaltheilung der geometrischen Ruthe, Schuh, Zoll und Linien sey, als die französisch- und rheinländische, die ihre Ruthe, Schuhe, und Zolle in 12 Theile abtheilen.

§. 158. II. Aufgabe. Die ganze Oberfläche, und den dichten Innhalt eines Prisma finden.

Auflös. 1. Wenn die Grundfläche des Prisma ein regulares Polygon ist, darf man nur eine Seite dieses Polygons durch die Höhe des Prisma, und dieß Product durch die Zahl der Polygonsseiten multipliciren, so bekömmt man den Quadratinnhalt von der Oberfläche der Seiten: addirt man nun auch den gedoppelten Innhalt der Grundfläche, kömmt der Innhalt der ganzen Oberfläche des Prisma heraus.

2. Ist aber die Grundfläche ein irregulares Polygon, muß der Innhalt eines jeden Seitenparallellogramms in Sonderheit berechnet, und die Summe zur gedoppelten Grundfläche addirt werden.

Den dichten Innhalt eines jeden Prisma erhält man, wenn man die Grundfläche durch die Höhe des Prisma multiplicirt.

Der

Der Beweis hiervon, ist schon oben bey Berechnung des Cubus, der eben eine Gattung des Prisma ist, angebracht worden. (§. 154.)

§. 159. Anmerk. Weil wir jede Zirkelfläche für ein regulares Polygon von unzahlbaren und unendlich kleinen Seiten betrachten können (§§. 73. und 74.) können wir eben darum auch einen jeden Cylinder, der den Zirkel für seine Mutterfläche hat, für ein Prisma ansehen; dahero seine ganze Oberfläche zu bestimmen man nur die Summe aller dieser unendlich kleinen Polygonsseiten, das ist die Peripherie der Grundfläche durch die Höhe des Cylinders multipliciren, und dem Producte den gedoppelten Innhalt der Grundfläche addiren darf.

So findet man auch den dichten Innhalt des Cylinders, wenn man den Quadratinnhalt der Grundfläche durch seine Höhe multiplicirt.

§. 160. III. Aufgabe. Die ganze Oberfläche einer aufrecht stehenden ganzen Pyramide finden.

Aufl. Wenn die Grundfläche der Pyramide ein regulares Polygon ist, darf man nur die Summe der Polygonsseiten, durch eine Linie multipliciren, die vom Spitze der Pyramide gezogen auf einer der Polygonsseiten senkrecht stehet, und das Product durch 2 dividiren, so hat man den Innhalt aller Seiten-

flächen. Setzt man nun auch den Innhalt der Grundfläche hinzu, bekömmt man die ganze Oberfläche der Pyramide.

Beweis. Die Seitenfläche einer regularen Pyramide bestehet aus so vielen gleichen Dreyecken, als die Grundfläche Seiten hat, welche alle die nämliche Höhe haben; die durch eine jede vom Spitze der Pyramide auf eine Polygonsseite perpendicular gezogene Linie ausgedrückt wird. Es ist also die Summe dieser Dreyecke gleich dem Producte, welches entstehet, wenn wir die halbe Summe dieser Polygonsseiten, durch die gemeldte Perpendicularlinie multipliciren ꝛc.

Der Anfänger wird hier erinnert, daß er ja die Höhe dieser Dreyecke nicht für die Höhe der Pyramide ansehe.

§. 161, Anmerk. Wenn die Pyramide schief liegt, oder ein irregulares Polygon zur Grundfläche hat, muß man gleichwohl alle Dreyecke in Sonderheit berechnen, und die Grundfläche zu ihrer Summe addiren.

§. 162. Weil die Grundfläche eines Kegels eine Zirkelfläche, und hiemit ein regulares Polygon ist (§. 73.) findet man seine ganze Oberfläche eben so, wenn man die Seite bc (119. *Fig.*) durch die halbe

Peri-

Peripherie der Grundfläche Adb multipliciret, und dem Producte den Innhalt der Grundfläche addirt, wenn anderst der Kegel aufrecht stehet; denn die Oberfläche eines schiefliegenden Kegels, oder auch Cylinders kann durch die Elementargeometrie nicht bestimmt werden.

§. 163. IV. Aufgabe. Die ganze Oberfläche einer aufrechten aber gestümmelten Pyramide finden.

Aufl. Wenn die Grundfläche der gestümmelten Pyramide ein regulares Polygon ist, verfährt man so.

1. Sucht man zwischen BC und bc (120. *Fig.*) die mittlere arithmetische Proportionallinie mn, und multiplicirt sie durch die Perpendicular fg, so bekömmt man den Innhalt des gestümmelten Dreyeckes, oder des Trapezii BbCc.

2. Diesen Innhalt multiplicire man durch die Zahl der Seiten des Polygons, welches die Pyramide zur Grundfläche hat, so giebt das Product die Summe aller gestümmelten Dreyecke, oder die Seitenfläche der Pyramide.

3. Addirt man nun auch den Quadratinnhalt der obersten und untersten Grundfläche, so hat man die ganze gesuchte Oberfläche.

Beweis. Ein jedes Dreyeck ist = der Summe einer arithmetischen Progreßion ∸ 0, 1, 2, 3, 4 ꝛc. so ist auch ein gestümmeltes Dreyeck einer solchen Summe gleich, in welcher aber die ersten Glieder weggelaßen.

Das erste Glied also in dieser unserer Progreßion ist b c, das letzte BC, die Zahl der Glieder aber wird durch die Perpendicular fg ausgedrückt. Nun ist

$$S = \frac{an + \omega n}{2}, \text{ das ist } \overline{bc + BC} \times \frac{fg}{2} = \frac{\overline{bc + BC}}{2} \times fg.$$

Die weitere Auflösung dieser Aufgabe hat keines Beweises mehr nöthig.

§. 164. Die Oberfläche eines gestümmelten Kegels findet man eben so, wenn man die Seite des Kegels durch die Zirkelperipherie mn, (121. *Fig.*) welcher wieder der mittlere arithmetische Proportionalzirkel zwischen ab und AB ist, multiplicirt, und zum Producte die Summe der unterst- und obersten Zirkelfläche addirt. Der Beweis davon ist der nämliche.

§. 165.

§. 165. Aus der Gestaltung der Pyramide sowohl, als des Kegels sieht man schon, daß, um ihren dichten Innhalt zu finden, man alle Flächen, die von einer unendlich kleinen Höhe sind, und deren Summe durch die Höhe der Pyramide oder des Kegels ausgedrückt wird, unter eine Summe bringen müße.

Weil nun alle diese unendlich kleine Flächen einander ähnlich sind, verhalten sich ihre Innhalte gegeneinander wie die Quadrate ihrer correspondirenden Seiten (§.72. VIII.) diese Seiten aber, wenn wir die Progreßion vom Spitze der Pyramide anfangen, wachsen in einer arithmetischen Proportion wie die Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5 \ldots \infty$ wovon die Quadrate sind $0, 1, 4, 9, 16, 25 \ldots \infty^2$.

Nun muß hier ein Anfänger einen Lehrsatz aus der Infinitesimalrechnung borgen, und indessen für erwiesen annehmen, der in der allgebraischen Aequation so ausgedrückt wird: $S^2 = \frac{1}{3}\infty^3$. Das ist: In einer unendlichen Reihe der natürlichen Zahlenordnung $0, 1, 2, 3 \ldots \infty$ ist die Summe der Quadraten aller dieser Zahlen gleich dem dritten Theile des Productes, welches entstehet,

wenn man das Quadrat des letzten Gliedes $\omega^2 = \infty^2$ durch die Zahl der Glieder $n = \infty$ multiplicirt.

§. 166. Die Grundfläche einer Pyramide, oder eines Kegels ist also das letzte Glied $= \omega = \infty$ in unserer Progreßion; die ganze Höhe aber drücket die Summe, oder die Zahl der Glieder aus. Dieses zum voraus geschickt können wir die Aufgabe ohne weiters auflösen.

§. 167. *Aufgabe. Den dichten Innhalt einer Pyramide, oder eines Kegels finden.*

Aufl. Man multiplicire die Grundfläche durch die Höhe des Körpers, und dividire das Product durch 3. Der Quotient wird der gesuchte Innhalt seyn.

§. 168. Weil wir den dichten Innhalt eines Prisma, oder eines Cylinders finden, wenn wir seine Höhe durch die Grundfläche multipliciren, so folget der in der Geometrie so wichtige Lehrsatz von sich selbst, *daß ein jede Pyramide, und jeder Kegel gleich sey dem dritten Theil eines Prisma oder Cylinders, der die nämliche Höhe und Grundfläche hat.*

§. 169. Aufgabe. Den dichten Innhalt eines gestümmelten Kegels finden.

Aufl. 1. Suche die Differenz zwischen den halben Durchmessern der zwoen Grundflächen des gestümmelten Kegels = Ch (121. *Fig.* n. 2.), und auch seine Höhe fh.

2. Nun haben wir folgende Proportion:

Ch : fh = CD : BD. (§. 32. n. II.)

Dahero $BD = \frac{CD \times fh}{Ch}$ = der Höhe des ganzen Kegels ABC.

3. So können wir jetzt den dichten Innhalt des ganzen Kegels ABC finden.

4. Es ist aber auch BD — fh = Bg die Höhe des kleineren Kegels eBf.

5. Wenn wir also den dichten Innhalt des kleineren Kegels eBf von dem Innhalt des ganzen ABC abziehen: wird der Rest der gesuchte Innhalt des gestümmelten Kegels seyn.

Anm. Es läßt sich zwar der §. 168. angebrachte Lehrsatz auch geometrisch erweisen. Mich aber hat es die Erfahrung gelehrt, daß wegen der flachen Figur die Beweisungsart für die Anfänger jederzeit dunkel und unbegreiflich bleibe. Ich wollte sie

te sie dahero lieber weglaßen, und meinen Schülern ein von Holz in drey gleiche Pyramiden (so genau man es nämlich von der practischen Mechanick erwarten kann) geschnittenes Prisma vorlegen.

IV. Abhandlung.

Von Ausmeßung der Sphäre in Sonderheit.

§. 170. Wenn wir den halben Zirkel, woraus die Sphäre entstehet (§. 139.) als die Hälfte eines regularen Polygons unendlich kleiner Seiten, wie AB, BQ, QF ꝛc. (122. *Fig.*) betrachten, werden auf der Maschine die Trapezien ABDE, BQFD ꝛc. durch ihre Bewegung lauter gestümmelte Kegel zeugen. Es sind also die kleinen gestümmelten Kegel die Elementen der Sphäre, und die Summe dieser Kegel, die zwar ungleiche, aber doch alle unendlich kleine Höhen haben, ist jederzeit der ganzen Sphäre gleich.

Nun wollen wir nur einen einzelen Lehrsatz erweisen, woraus wir hernach die ganze Oberfläche der

Sphäre,

Sphäre, und ihren dichten Innhalt ohne weiters werden bestimmen können. Er ist folgender:

§. 171. **Lehrsatz.** Die Oberfläche eines jeden gestümmelten Kegels (welche die Elemente einer Sphäre ausmachen) ist gleich dem Producte, welches wir erhalten, wenn wir die Höhe eines solchen Kegels durch die Peripherie des größten Zirkels der Sphäre multipliciren.

Beweis. Die Oberfläche des gestümmelten Kegels ABDE bekömmt man, wenn man die Seite AB durch die Peripherie des mittleren Zirkels yR multiplicirt. (§. 164.) Wir müßen also erweisen, daß dieses Product AB × yR gleiche sey dem Producte TX × yS. Denn die Peripherien verhalten sich, wie ihre Durchmesser yR und yS.

Man ziehe nun den Durchmesser yS, und die zwo Perpendicularlinien BZ und RS. So ist TX die Achse, oder Höhe des Kegels = BZ.

Man kann aber jetzt leicht erweisen daß die Dreyecke ABZ, und yRS ähnliche Dreyecke seyen.

Denn es ist der Winkel AZB = yRS.

Ueberdas ist der Winkel BAZ = RSy.

 Denn

Denn es ist der Winkel BAZ = ByR, der äußere dem inneren zwischen Parallelen.

Es ist aber auch RSy = ByR

Weil sie beede den Bogen ym oder $\frac{ymR}{2}$ für ihre Maase haben.

Folglich ist der Winkel ABZ = RyS, der dritte dem dritten.

Wir haben dahero folgende Proportion der correspondirenden Seiten BZ (= TX) : AB = yR : yS.

Das ist: die Höhe des Kegels verhält sich zur Seite desselben, wie die Peripherie eines Zirkels, dessen Diameter = yR zu der Peripherie eines Zirkels, dessen Diameter = yS.

Dahero TXyS = AByR.

Weil nun AByR die Oberfläche des Kegels ist. So ist auch TXyS, oder das Product aus der Höhe des gestümmelten Kegels durch die Peripherie des größten Zirkels der Sphäre der nämlichen Oberfläche des Kegels gleich. w. z. e.

§. 172. Dieser einzige Lehrsatz nun ist schon hinlänglich, daß wir eine Menge wichtigster Aufgaben auflösen, und nur als eben so viel natürliche Folgen desselben ansehen können.

§. 173. **Aufgabe.** Die Oberfläche einer Sphäre finden.

Aufl. Man multiplicire die Achse oder den Diameter der Sphäre durch die Peripherie des größten Zirkels, so wird das Product die gesuchte Oberfläche seyn.

Beweis. Die Summe der Oberflächen aller Elementen der Sphäre ist der Oberfläche der ganzen Sphäre gleich. Nun erhält man aber diese Summe, wenn man die Summe aller Achsen der Elementarkegeln (das ist, die Achse der ganzen Sphäre) durch die Peripherie ihres größten Zirkels multiplicirt. w. z. e. Hieraus folget:

I. Daß die Oberfläche der ganzen Sphäre viermal so groß, als die Oberfläche ihres größten Zirkels sey. Denn, wenn wir die Peripherie p nennen, und den Durchmesser d, so ist der Quadratinnhalt der größten Zirkelfläche einer Sphäre $= \frac{1}{2} d \times \frac{1}{2} p = \frac{1}{4} d p$. Die Oberfläche der Sphäre aber $= p \times d = p d$.

II. Daß die Oberfläche einer Sphäre gleich sey der Seitenfläche eines Cylinders dessen Achse oder Höhe

he dem Diameter, und dessen Grundfläche dem größten Zirkel der Sphäre gleich ist.

III. Es ist demnach die ganze Oberfläche eines solchen Cylinders, wo die Höhe dem Diameter der Grundfläche gleich, sechsmal so groß als die Grundfläche.

Da nun die Oberfläche der Sphäre viermal so groß ist, wird die Oberfläche der Spähre $\frac{2}{3}$ der Oberfläche dieses Cylinders seyn, oder, was eben so viel heißet, jene zu dieser sich verhalten wie 3 : 2.

IV. Die Oberfläche was immer für eines Segmentes abc (123. *Fig.*) bekömmt man, wenn man seine Höhe bm durch die Peripherie des größten Zirkels der Sphäre multiplicirt.

V. Die Oberfläche einer Zone, die zwischen zween parallellaufenden Durchschnitten ac und de lieget, ist der Convexen-Seitenfläche eines Cylinders gleich, der die nämliche Höhe mn, und die Fläche des größten Zirkels der Sphäre für seine Grundfläche hat. Man bekömmt folglich auch die Oberfläche einer Zone, wenn man ihre Höhe durch die Peripherie des größten Zirkels der Sphäre multiplicirt.

§. 174.

§. 174. **Anmerk.** Eine jede Sphäre, oder Kugel können wir noch überdas betrachten, als wenn ihre Elemente lauter unendlich kleine Pyramiden wären, deren Spitze alle in dem Mittelpuncte zusammenlaufen, ihre Grundflächen aber die ganze Oberfläche der Sphäre ausmachen.

Alle diese Pyramiden sind nun von gleicher Höhe, die der Radius oder halbe Durchmesser der Sphäre bestimmt. Dahero eine jede Sphäre gleich ist einer Pyramide, dessen Höhe der Radius, und die Oberfläche der Sphäre die Grundfläche ist.

Weil wir nun (§. 167.) den dichten Innhalt einer Pyramide finden, wenn wir den dritten Theil der Höhe durch ihre Grundfläche multipliciren, wird uns folgende Aufgabe nicht mehr viel zu schaffen geben.

§. 175. **Aufgabe. Den dichten Innhalt einer gegebenen Sphäre finden.**

Aufl. Man multiplicire den dritten Theil des Radius, oder den sechsten des ganzen Diameters durch die Oberfläche der ganzen Sphäre, welche viermal so groß, als der Innhalt des größten Zirkels ist.

Wenn wir dahero setzen, es sey der Diameter = d
Der größte Zirkel = m

Ist der dichte Innhalt der Sphäre $= \frac{1}{6} d \times 4m =$

$$= \frac{4}{6} dm = \frac{2}{3} dm.$$

Wor-

Woraus wir nachstehende wichtigste Folgen ziehen.

I. Wenn wir über die Sphäre C hin (124. *Fig.*) einen Cylinder ABDE bauen, wird sein dichter Innhalt = d m seyn. Es verhält sich demnach der Cylinder zu der darinn liegenden Sphäre wie $dm : \frac{2}{3} dm = 1 : \frac{2}{3}$.

Dahero jede Sphäre gleich $\frac{2}{3}$ theilen des darüber gebauten Cylinders ist.

II. Wenn wir in diesen Cylinder einen Kegel AmE setzen, der die nämliche Höhe und Grundfläche hat, wird dieser einem dritten Theil des Cylinders gleich seyn, das ist $= \frac{1}{3} dm$.

Es verhalten sich demnach die drey Körper, der Kegel, die Sphäre, und der darüber gebaute Cylinder untereinander wie die Zahlen $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$. Das ist, wie $3, 2, 1 = dm, \frac{2}{3} dm, \frac{1}{3} dm$.

III.

III. Um den dichten Innhalt eines sphäris. Sectors ABD (125. *Fig.*) zu finden, braucht es mehr nicht, als den dritten Theil des Radius AC $= \frac{1}{3}$ AC durch die sphärische Oberfläche ABD des Sectors multipliciren. Diese sphärische Oberfläche ABD aber bekömmt man (§. 173. n. IV.) wenn man die Höhe Bm durch die Peripherie, dessen Radius AC ist, multiplicirt. Die Höhe Bm aber wird bestimmt durch die aus dem Puncte A auf BC gezogene Perpendicularlinie Am.

IV. Will man den dichten Innhalt des Segmentes ABDm allein haben, darf man nur den dichten Innhalt des Kegels AmDC suchen (§. 167.) und ihn vom Innhalte des Sectors abziehen.

§. 176. **Aufgabe.** **Den dichten Innhalt eines irregularen Körpers bestimmen.**

Aufl. 1. Man laße sich ein cylindrisch- oder anderes prismatisch- und rechtwinkelichtes Geschirr verfertigen, dessen Innhalt leicht zu finden.

2. In dieß lege man den irregularen Körper.

3. Auf diesen gieße man Wasser, oder (wenn der Körper Wasser schlucket) Sand, bis diese flüßige

ge Materie über die Oberfläche, oder Spitze des Körpers hergehet, und eben ist.

4. An dem Geschirr bemerke man die Höhe des Wassers.

5. Wenn der Körper herausgenommen, merke man die Höhe des Wassers wieder.

Wenn man nun diese zwo Höhen, eine nach der anderen, durch die Grundfläche des Geschirrs multiplicirt, wird die Differenz der Producte der gesuchte Innhalt des irregülaren Körpers seyn.

V. Abhandlung.

Von Vergleichung der dichten Körper.

§. 177. Aehnliche Körper werden diejenigen genennt, deren correspondirende Winkel einander gleich, und deren Flächen lauter ähnliche Figuren sind, die folglich in so viel ähnliche Dreyecke können getheilt werden, als sie Seiten haben.

§. 178. Es stehen demnach alle correspondirende Seiten, Flächen, und was immer für Dimensionen ähnlicher Körper untereinander in einer geometrischen Proportion.

§. 179.

§. 179. Alle regularen dichten Vielecke, die zum nämlichen Fache oder Gattung gehören, wie z. B. alle Cylinder, alle Sphären ꝛc. sind ähnliche Körper.

§. 180. Weil die Oberfläche (ohne die Grundflächen mitzunehmen) eines jeden Körpers dem Producte aus zwoen Dimensionen gleich ist, sind alle Lehrsätze, die wir im II. Abschnitte §. 72. ꝛc. von den ebenen Flächen erwiesen, auch von den Oberflächen der Körper erweislich.

§. 181. **Lehrsatz.** Die Oberflächen zweener Körper, die zur nämlichen Gattung gehören, haben ein aus zwoen Dimensionen zusammengesetztes Verhältniß gegeneinander; weil jede Oberfläche ein Product aus zwoen Dimensionen ist. Die Folgen davon sind.

§. 182. I. Wenn zween Körper eine von diesen zwoen Dimensionen einander gleich haben, verhalten sich ihre Oberflächen, wie die andere ungleiche Dimension. Z. B. Zween ungleiche Cylinder haben die nämliche Höhe, so verhalten sich ihre Oberflächen gegeneinander, wie die Peripherien ihrer Grundflächen ꝛc.

§. 183. II. **Wenn die zwo Dimensionen zweener Körper *in ratione reciproca* untereinander stehen, sind die Oberflächen einander gleich.**

Es seyn z. B. Zween Cylinder M und m.

Die Höhe des Cylinders	M	=	A.
Die Peripherie seiner Grundfläche		=	P.
Die Höhe des Cylinders	m	=	a.
Die Peripherie seiner Grundfläche		=	*p*.

Wenn nun $A : a = p : P$.

So ist $AP = ap$. Das ist: die Oberflächen sind einander gleich, und folglich, wenn die Oberflächen einander gleich $AP = ap$, stehen die zwo Dimensionen *in ratione reciproca*, und wird $A : a = p : P$ seyn.

§. 184. **Lehrsatz. Die ganze Oberflächen (auch die Grundflächen mitgenommen) zweener ähnlichen Körper verhalten sich untereinander, wie die Quadrate was immer für correspondirender Dimensionen.**

Beweis. Alle correspondirende Dimensionen zweener ähnlicher Körper stehen in geometrischer Proportion untereinander. Es sind also ihre Oberflächen lauter Producte aus Zwoen in Proportion stehenden Größen. So verhalten sie sich denn wie die Quadrate ihrer correspondirenden Dimensionen.

Zum

Zum B. Es sey die Oberfläche einer Sphäre = S
Einer anderen kleinern = s
Die Peripherie des größten Zirkels der ersten = P
Der kleinern = p
Der Durchmesser der größern = D
Der kleinern = d

So ist $S : s = DP : dp$.
Es ist aber auch $D : d = P : p$.
Dahero $DP : dp = D^2 : d^2$ (Allg. §. 119.)
Und $DP : dp = P^2 : p^2$.
Folglich auch $S : s = D^2 : d^2 = P^2 : p^2$.
Das ist: Die Oberflächen der Sphären verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser untereinander.

§. 185. Weil wir, um den dichten Innhalt eines Körpers zu finden jederzeit drey Dimensionen durcheinander multipliciren müßen, nämlich die Achse, oder die Höhe eines Körpers durch eine Fläche, die selbst schon ein Product aus zwoen Dimensionen ist, so bedarfen folgende Lehrsätze keines weiteren Beweises.

§. 186. Lehrsatz. Die dichten Innhalte zweener Körper haben ein aus dreyen Dimensionen zusammengesetztes Verhältniß gegeneinander.

§. 187. **Lehrsatz.** Wenn es zween ähnliche Körper sind, verhalten sich ihre dichten Innhalte gegeneinander, wie die Cubi der correspondirenden Dimensionen.

Beweis. Alle correspondirende Dimensionen zweener ähnlichen Körper stehen untereinander in Proportion. Es sind dahero ihre dichten Innhalte lauter Producte aus drey in Proportion stehenden Grössen, so verhalten sie sich denn, wie die Cubi ihrer correspondirenden Dimensionen.

Z. B. Es sey der dichte Innhalt einer Sphäre $= V$
Einer anderen kleineren $= v$
Die Oberfläche der erstern $= S = DP$
Der kleineren $= s = dp$
Die Achse der grösseren $= A$
Der kleineren $= a$

So ist $V = \frac{SA}{6}$ (§. 175.)

Und $v = \frac{sa}{6}$

Dahero $V : v = SA : sa$.

Das ist: $V : v = ADP : adp$.

Es

Es ist aber auch $A : a = D : d = P : p$.

Dahero ist $ADP : adp = A^3 : a^3 = D^3 : d^3 = P^3 : p^3$. (Allg. 120.)

Folglich ist auch $V : v = A^3 : a^3 = D^3 : d^3 = P^3 : p^3$.

Das ist: die dichten Innhalte zwoer Sphären verhalten sich gegeneinander, wie die Cubi ihrer correspondirenden Dimensionen, folglich wie die Cubi ihrer Durchmesser.

§. 188. Anmerk. Die so wichtig- als nützliche Folgen, die besonders ein Artillerist aus diesem Unterricht von den dichten Körpern hernehmen muß, werden im zweyten Theile dieses Werkes erscheinen, wo wir von den practischen Anwendungen unser theoretischen Lehrsätze handeln werden.

Von der Trigonometrie der flachen Drenecke.

I. Abhandlung.

Von den Logarithmen und Decimalbrüchen.

§. 189.

Nehmen wir was immer für eine geometrische Progreßion für uns, z. B. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. rc. und schreiben eine Arithmetische darunter 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. rc. so werden die Glieder der

arithmetischen Progreßion Logarithmen der correspondirenden Glieder von der Geometrischen genennt.

Anmerk. Es würde viel zu verdrüßlich seyn, eine weitläufige Erklärung von der Erfindung und Einrichtung der Logarithmustafeln herzusetzen. Sie sind G. L. schon erfunden, und wir haben diese nutzliche Arbeit dem unbeschreiblichen Fleiße unserer Vorfahrer zu verdanken, die uns keine andere Mühe hinterlassen, als daß wir uns des Werkzeuges, den sie uns in die Hände geliefert, zu bedienen lernen, wozu ein paar Lehrsätze, und etwelche Aufgaben schon erklecklich seyn können.

§. 190. I. **Lehrsatz.** *Wenn der Logarithmus von 1 = 0 ist, und man zwo Zahlen durcheinander multipliciren will, z. B. 4 × 16, darf man nur ihre Logarithmen addiren (2 + 4) so ist die Summe (6) jederzeit gleich dem Logarithmus des Products. (64)*

Beweis. Es sey das Product = F.

Die zween Factoren = m und M.

So ist bey jeder Multiplication $1 : m = M : F$.

Heißen wir nun die vier correspondirenden Logarithmen o, a, b, c, so haben wir die geometrische

Proportion $1 : m = M : F$.

Und die Arithmetische $o . a = b . c$.

Es ist also $C = a + b$. der Logarithmus des Products. w. z. e.

Um

Um diesen Beweis allgemeiner zu machen, sey eine geometrische Progreß. $1, m, m^2, m^3, m^4, m^5, m^6, m^7$. Eine Arithmetische $0, d, 2d, 3d, 4d, 5d, 6d, 7d$.

Es ist klar, daß in der geometrischen Progreßion das Poduct aus m^3 und m^4 zu finden, man nur 3 und 4, als die Exponenten dieser Factoren addiren darf, so kömmt 7, der Exponent des Productes, oder des achten Glieds heraus $= m^7$.

Nun ergiebt sich auch in der arithmetischen Progreßion der Logaaithmus 7d des nämlichen achten Glieds m^7, wenn man die Logarithmen der Factoren 3d und 4d addirt. Also darf man jederzeit nur die Logarithmen der Factoren addiren, um den Logarithmus des Productes zu erhalten, w. z. e.

§. 191. Wir wollen jetzt über diesen Lehrsatz nur ein oder das andere Beyspiel von der Bequemlichkeit der Logarithmen in unserer Arithmetick hersetzen.

I. Um aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel auszuziehen, braucht es mehr nicht, als daß man den Logarithmus davon durch 2 dividire: so wird der Quotient der Logarithmus der Wurzel, und hiemit die respondirende Zahl die gesuchte Wurzel seyn.

Z. B. Ich soll aus 9216 die Quadratwurzel ausziehen. Von 9216 ist der Logar. = 3. 9645425.

Nun ist $\frac{3.9645425}{2}$ = 1. 9822712, weil nun diesem Logarithmus die Zahl 96 in der Tabelle respondirt, ist $\sqrt{9216} = 96$.

II. Sollen wir eine Zahl quadriren, dürfen wir nur ihren Logarithmus dppliren, so haben wir den Logarithmus des gesuchten Quadrates.

Z. B. Von 34 ist der Log. = 1. 5314789.

Der Gedoppelte = 3. 0629578.

Dessen in der Tabelle respondirende Zahl = 1156.

Es ist folglich $34^2 = 1156$.

III. Um aus einer gegebenen Zahl die Cubicwurzel auszuziehen, darf man nur ihren Logarithmus durch 3 dividiren, so ist der Quotient der Logarithmus der gesuchten Wurzel.

Z. B. Ich soll aus 9261 die Cubicwurzel ausziehen. Von 9261 ist der Log. = 3. 9666579.

Nun ist $\frac{3.9666579}{3}$ = 1. 3222193, und die respondirende Zahl = 21. ist demnach $\sqrt[3]{9261} = 21$.

IV.

IV. Sollen wir also eine gegebene Zahl (12) cubiren, so multipliciren wir nur ihren Logarithmen 1. 0791812 durch 3, so ist das Product 3. 2375436, der Logarithmus des gesuchten Cubus = 1728.

§. 192. II. **Lehrsatz.** **Wenn wir für den Logarithmus von 1 eine Nulle (0) annehmen, und man zwo Zahlen durcheinander dividiren will, z. B. $\frac{64}{4}$, darf man nur den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividendi abziehen, so bekömmt man den Logarithmus des Quotientens, nämlich 6 — 2 = 4, welches der Logarithmus des Quotientens 16 ist.**

Beweis. Es sey der Quotient = q Log. = c.
Der Divisor = d = a.
Die Zahl, die man dividiren will = D = b.
So ist bey jeder Division d : D = 1 : q die geometrische Propor. richtig, wie auch a : b = 0 : c die arithmetische der Logarithmen. Dahero c = b — a, das ist: die Differenz der Logarithmen des Divisors, und Dividendi giebt den Logarithmus des Quotientens, w. z. e.

§. 193. Um also den Logarithmus eines Afterbruches ($\frac{6}{3}$) zu finden, darf man nur den Logarith-

mus des Nenners (3) vom Logarithmus des Zehlers (6) abziehen.

§. 194. Weil jede Zahl, die einen Bruch neben sich stehen hat (wie $3\frac{2}{5}$) in einen Afterbruche ($\frac{17}{5}$) kann verändert werden, kann man schon auch den Logarithmus davon finden.

§. 195. Soll man aber den Logarithmus einer wahren Fraction ($\frac{3}{5}$) finden, muß man den Logarithmus des Zehlers vom Logarithmus des Nenners abziehen, und das Negativzeichen — vor dem Rest hinsetzen; denn eine wahre Fraction ist < 1, weil also schon der Logarithmus von $1 = 0$ ist, muß nothwendig der Logarithmus einer wahren Fraction < 0 und hiemit eine Negativgröße seyn.

§. 196. **Anmerk.** Man siehet von sich selbst, daß, wenn nur kleine Zahlen vorkommen, sichs der Mühe kaum verlohnen würde, daß wir uns der Logarithmusrechnung bedienen. Weil wir aber in der practischen Geometrie, und besonders in der Stereometrie immer mit großen Zahlen zu thun kriegen, werden wir die Bequemlichkeit dieser Rechnung bald wahrnehmen: nur müßen wir zuvor einen Begriff von den Decimalbrüchen und ihrer Rechnung haben.

§. 197.

§. 197. Ein Decimalbruch ist derjenige, dessen Nenner nur aus 1, und so viel Nullen bestehet, als Ziffer im Zehler vorkommen.

§. 198. Man läßt dahero den Nenner gar weg, und trennet durch einen entzwischen gesetzten Puncte den Zehler der Decimalfraction von den ganzen Zahlen ab, wenn einige vorhanden sind: wo nicht, wird vor dem Trennungspuncte eine Nulle hingeschrieben.

Wir schreiben also z. B. statt 19, $\frac{4}{10}$, 19, 4.

und statt 19, $\frac{4}{100}$ schreiben wir 19, 04, und setzen vor 4 ein Nulle hin, um anzudeuten, daß der Nenner nicht 10, sondern 100 heissen müße.

Eben so ist $\frac{36}{1000} = 0, 036$. und $\frac{4}{10000} = 0, 0004$.

§. 199. Es wachsen demnach die Nenner der Decimalen in einer zehnfachen Proportion, und ist 4, 217 eben so viel, als $4 + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{7}{1000}$

$$= 4 + \frac{200}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{7}{1000} = \frac{217}{1000}$$

§. 200. Man kann dahero zu einer Decimalfraction Nullen rechterseits hinschreiben, so viel man will, ohne ihren Werth zu verändern; denn es ist 0, 1 = 0, 10 = 0, 100 ꝛc.

Es ist also auch 4, 7 = 4, 7000, und folglich ist 4, 7 größer, als 4, 69, oder auch als 4, 69999 ꝛc.

Denn es ist $4,7 = 4, \frac{7}{10} = 4, \frac{70}{100} = 4, \frac{70000}{100000}$.

Entgegen ist $4, 69 = 4, \frac{69}{100}$, und $4, 69999 = 4, \frac{69999}{100000}$.

Es ist aber ja $4, \frac{69}{100}$ um $\frac{1}{100}$ kleiner als $4, \frac{70}{100}$.

Und eben so ist $\frac{70000}{100000}$ um $\frac{1}{100000}$ größer, als $\frac{69999}{100000}$.

§. 201.

§. 201. Aus dieser Betrachtung der Decimalbrüche können wir nützliche Folgen ziehen.

I. Unter zwoen Decimalfractionen ist diejenige größer, in welcher die erste Zahl größer ist, oder, wenn die ersten Zahlen in beyden gleich sind, diejenige, die noch andere Zahlen, welche keine Nullen sind, neben sich stehen hat.

II. Wenn eine Decimalfraction aus mehr Zahlen bestehet, können die letztern ohne Bedenken weggelassen werden, wenn man die ersten zwey oder drey beybehält.

III. Doch, wenn man die letzten Zahlen wegläßt, und die erste aus den Weggelassenen größer als 5 ist, mehrt man die, welche man beybehält, um 1. Z. B. statt 0, 4864 schreibt man 0, 49.

§. 202. Aufgabe. Was immer für einen gegebenen Bruch in einen Decimalbruch des nämlichen Werths verändern.

Aufl. Zum Zehler des gegebenen Bruches setze man eins, zwey oder mehr Nullen, und dividire das Product durch den gegebenen Nenner, so wird der Quotient der Zehler der gesuchten Decimalfraction seyn.

Zum B. $\frac{3}{4} \cdot \frac{300}{4} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$.

Wiederum $\frac{1}{60} \cdot \frac{10000}{6} \Big| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} = \frac{1666}{100000}$ ꝛc.

Dahero $\frac{1}{60}$ beynahe $= \frac{1666}{100000}$ ꝛc.

§. 203. Es giebt nämlich eine Menge Brüche, die sich nicht eben genau durch ein Decimal ausdrucken laßen, und man dividire z. B. bey der Fraction $\frac{1}{60}$ fort, so lang man will, so wird der Rest jederzeit 40, und der Quotient 6 bleiben, ohne an ein Ende zu kommen. Eben so würde es mit dem Bruche $\frac{4}{7}$ ergehen; man bekömmt 0, 571428571428571428 ꝛc. und s. f. In diesem Falle ist es schon hinlänglich, wenn man nur die zwo oder drey erstern Zahlen beybehält, und für $\frac{1}{60}$, 0, 017, für $\frac{4}{7}$ aber 0, 58 annimmt.

§. 204. Die Regeln der arithmetischen Operationen sind bey den Decimalbrüchen die nämlichen, nach wel-

welchen wir in der gemeinen Arithmetick bey den ganzen, oder ungebrochenen Zahlen arbeiten; nur den Scheidspunct betreffend, womit wir die Decimalen von den ganzen trennen, haben sie etwas besonders.

§. 205. Aufgabe. Decimalgrößen addiren.

Aufl. Man schreibe zuerst die ganzen Zahlen untereinander, jede an ihren Platz, und setze zu jeder einen Punct, oder Strichgen hin.

2. Gleich an den Punct schreibe man zu jeder die gehörige Decimalen, und bringe alles unter eine Summe, in welcher der Scheidspunct gerad unter die obern Puncte zu stehen kömmt. Hier ist ein Beyspiel.

```
4852, 791
   4, 00745
   2, 7
   0, 0049
-----------
4859, 50335
```

§. 206. Aufgabe. Decimalgrößen subtrahiren.

Aufl. Man verfährt wie zuvor, und folgt der gemeinen Subtractionsregel, wie in folgenden Beyspielen zu sehen.

57, 02	4, 8274	6, 00435
48, 1	2, 0139	0, 17
8, 92	2, 8135	5, 83435

§. 207. Aufg. Decimalgrößen multipliciren.

Aufl. Man multiplicirt, wie bey den ganzen Zahlen: nur hat man zu merken, daß man im letzten Producte, nachdem alle Particularproducte addirt worden, so viel Zahlen oder Ziffer von den erstern rechterseits abtrenne, so viel Decimalen in beyden Factoren sind. Nachgesetzte Beyspiele sollen die Regel deutlich machen.

43, 7	33, 23
13, 0	12, 134
131 1	13 292
437	99 69
568, 1	332 3
	6646
	3323
	403, 21 282

§. 208. Aufg. Decimalgrößen dividiren.

Aufl. Man macht es wieder, wie in den ganzen Zahlen in der gemeinen Arithmetick, außer daß man in dem Quotientenrechts so viel Zahlen von den

Gan-

Ganzen trennet, um so viel mehr Decimalen in dem Dividendo, als im Divisor sind.

Man soll zum B. die Decimalgröße 0, 1675040 durch eine andere 0, 032 dividiren, so dividirt man 1675040 durch 32, der Quotient wird 52345 seyn. Weil nun im Dividendo um 4 Decimalen mehr, als im Divisor sind, wird im Quotienten 5 eine Ganze, die übrigen aber Decimalzahlen oder Brüche seyn: nämlich 5, 2345.

§. 209. Daß es mit dieser Regel seine Richtigkeit habe, zeigt sich durch die gemeine Probe der Division, wenn man den Quotienten durch den Divisor multiplicirt, so wird das Product sammt dem Reste, wo ein solcher zugegen, jederzeit der gegebnen Zahl gleich seyn, die man dividirt hat.

Z. B. $\frac{8,445}{3,22} = 2,6$

```
 3,22
 6 44
 2 005
   322
 1 932'
    73
```

Nun ist $(2,6 \times 3,22) + 73 = 8,445$.

§. 210. Anmerk. Wenn etwann im Divisor mehr Decimalen, als im Dividendo vorkommen, muß man diesem so viel Nullen beysetzen, um im Quotienten einige Decimalen zu bekommen, bis es größer wird, als der Divisor.

Ich soll z. B. 49, 1 durch 20, 074 dividiren. Hier setze ich zu 49, 1 vier Nullen, so:

```
49, 10000 | 2, 44
20, 074   |
40 148
------
 8 9520
 2 0074
 8 0296
 ------
   92240
   20074
   80296
   -----
   11944 .
```

Setzte man diesem Reste nochmal ein paar Nullen bey, würde der Quotient = 2, 4459 werden, und wieder 10034 zum neuen Reste bleiben, der keine Achtung mehr verdienet.

Und dieß ist alles, was ich nothwendig zu seyn glaubte, daß man von der Decimalrechnung wisse, um in folgenden Sätzen und Aufgaben leichter fortzukommen.

§. 211. Anmerk. Die natürliche Zahlordnung reichet in den gemeinen vlaccisch- und wolfischen Logarithmustafeln weiter nicht, als bis auf 10000. Wir müßen aber gar oft auch für größere Zahlen ihre Logarithmen, und entgegen Zahlen für Logarithmen finden, die in den Tafeln selber eben nicht genau enthalten sind. Zu dem Ende haben wir noch ein paar Worte von der sogenannten *Characteristica* der Logarithmen zu sprechen.

§. 212. Der einer gegebenen Zahl n correspondirende Logarithmus L ist eigentlich nichts anders, als der Exponent m von 10^m, welche Potenz der gegebenen Zahl n gleich ist. Wenn wir dahero die geometrische Progreßion setzen . . . .
∺ $10^0 . 10^1 . 10^2 . 10^3 . 10^4 . 10^5$ ꝛc. so heißt es so viel, als 1 . 10 . 100 . 1000 . 10000 . 100000 ꝛc.

Es ist demnach der Exponent 0 der Logarith. von 1
1 — — von 10
2 — — von 100
3 — — von 1000

und so fort. Wir haben aber hier nur die Logarithmen von ganzen Zahlen 1. 10. 100. 1000 ꝛc. um dahero auch die Logarithmen der Mittelzahlen 2. 3. 4. 5. ꝛc. zu erhalten, mußte man andere Wege suchen, und zu den vorigen Exponenten noch einige Nullen hinzusetzen ꝛc. Wovon ich aber hier nichts zu sagen habe,

weil ich nur den Gebrauch der Tafeln, nicht aber ihre ganze Theorie, zu erklären gesinnt bin.

§. 213. Man sieht aus dem Vorhergehenden schon, 1. daß alle Logarithmen zwischen 1 und 10 sich von 0, zwischen 10 und 100 von 1, zwischen 100 und 1000 von 2, zwischen 1000 und 10000 von 3 rc. anfangen müßen.

Diese Anfangszahl nun wird die *Characteristica* oder das Kennzeichen des Logarithmus genennt, weil sichs hierdurch gleich verräth, ob der Logarithmus zwischen 1 und 10, oder zwischen 10 und 100 rc. zu finden; und man also aus dieser *Characteristica* abnehmen kann, aus wie viel Ziffern die Zahl bestehen müße, die dem gegebenen Logarithmus respondirt; man sieht aber leicht, daß die Zahl der Ziffern jederzeit um 1 größer, als die Characteristica seyn müße; also ist zum Beyspiel die Characteristica der Logarithmen von 100 bis 1000 = 2. Alle diese Zahlen aber von 100 bis 1000 bestehen ja aus 3 Ziffern. Ist also die Zahl der Ziffern = 2 + 1 das ist, um 1 größer als die Characteristica.

§. 214. **Aufgabe.** *Den Logarithmus für eine Zahl bestimmen, welche größer ist, als 10000,*

und

und folglich in der gemeinen Logarithmustafel sich nimmer findet. z. B. für die Zahl 56432.

Aufl. 1. Suche man den Logarithmus für die erstern vier Ziffer 5643, nämlich 3. 7515100.

2. Dieses Logarithmus seine Characteristicam (3) vermehre man um die Zahl der weggelaßenen Ziffern; hier also um 1, weil wir nur eins, nämlich das lezte Ziffer weggelaßen, so haben wir 4, 7515100. Die weggelaßenen Ziffer (so viel, und was sie immer für seyn mögen) wollen wir kürze halber R heißen.

3. Von dem Logarithmus der gleich auf den (n. 1.) gefundenen in den Tafeln folgt, für die Zahl 5644 nämlich von 3, 7515870 zieh man den zuerst Gefundenen 3. 7515100 ab.

Der Rest = 770 wird die logarithmische Tafeldifferenz (differentia tabularis logarithmica) genennt, die wir künftig durch DT ausdrücken werden.

4. Zu den zwo Zahlen, die in der Logarithmustafel den zweenen Logarithmen respondiren, setze man so viel Nullen, als man Ziffer (n. 1.) weggelaßen: Hier also ein einziges, so: 56440 und zieh beyde 56430 voneinander ab, so wird der Rest = 10 genennt *differentia numerorum in canone evolutorum*, die

 wir

wir indessen die canonische Differenz heißen, und durch DC ausdrücken wollen.

5. Nun suche man die vierte Proportionalgröße x in folgender Ordnung der Glieder.

$$DC : DT = R : x$$

Das ist 10 : 770 = 2 : 154, welches die gesuchte Differenz ist, und zu dem Logarith. 4,7515100, den wir oben (n. 2.) gefunden, addirt werden muß 154

so ist die Summe der gesuchte Logar. = 4,7515254 für die gegebene Zahl 56432.

§. 215. *Aufgabe.* *Die Zahl für einen Logarithmus bestimmen, der sich in den Logarithmustafeln nicht eben genau finden läßt.* z. B. für den Log. 0,9245306.

Aufl. Entweder ist die Characteristica des gegebenen Log. kleiner, als die größte in der Logarithmustafel, oder kömmt sie ihr beynahe gleich?

Ist sie kleiner, wie in unserm Exempel, so vermehrt man sie um 1, 2, oder 3, nachdem man 1, 2, oder 3 Decimalen zu erhalten verlangt. Wir wollen unsere Characteristicam um 3 vermehren, und also den Logarithmus 3,9245306 in der Tafel suchen. Wir finden ihn zwar nicht selber, doch aber

einen andern, der ihm fast gleich kömmt, und nur um 71 größer ist, nämlich 3, 9245377. seine correspondirende Zahl heißt 8405. Ist dahero die gesuchte Zahl für den gegeben Logarithmus 9, 9245306 = 8, 405. Kömmt sie ihr aber beynahe gleich? verfährt man so:

1. Suche den Logarithmus, der kleiner ist, als der Gegebene, ihm aber doch aus allen am nächsten kömmt, und zieh ihn erstlich von dem gleich darauf folgenden, alsdenn auch von deinem gegebenen ab, und suche zur erstern Differenz = a, zur zweyten = b und zu der Zahl 100, die vierte Proportionalgröße = x

$$a : b = 100 : x$$

$$\frac{100b}{a} = x$$ welche zu der Zahl, die dem kleinern Logarithmus respondirt, addirt werden muß.

Z. B. Ich soll die Zahl für den Log. 3. 9281563 finden. So sieht die Operation ohngefähr so aus.

Log. proxime major.	3. 9281909
minor.	3. 9281397
Different. Ima = a = — —	512

$$\begin{array}{lcr} \text{Log. datus} & = & 3.9281563 \\ \text{proxime minor.} & = & 3.9281397 \\ \hline \text{Differ. IIda} = b = & - - - & 166 \end{array}$$

Nun haben wir $\frac{100b}{a} = x$. Das ist $\frac{100 \times 166}{512} = x$.

$$\begin{array}{r|l} 16600 & 32 \\ 512 & \\ 1536 & \\ \hline 1240 & \\ 512 & \\ 1024 & \\ \hline 216 & \end{array}$$

Es respondirt aber dem Log. proxime minori 8475, dahero wird die für den gegebenen Log. gesuchte Zahl seyn $= 8475 \frac{32}{100}$

§. 216. **Aufgabe.** *Die Zahl für einen Logarithmus bestimmen, der größer, als der Logarithmus von 10,000, und sich also in der Logarithmustafel nicht mehr finden läßt, z. B. für den Log. 7, 9281563.*

Aufl. 1. Zieh von deinem Logarithmus 7, 9281563 den Log. von einem Hauptarticel 10, oder 100, oder 1000, oder 10000 ab (hier nehmen wir den Log. von 10000.)

$$\begin{array}{lr} & 7,\ 9281563 \\ & -\ 4,\ 0000000 \\ \hline \text{So ist der Rest} & = 3,\ 9281563 \end{array}$$

2. Su=

2. Suche die diesem Reste respondirende Zahl = 8475, 32 (§. 215.)

3. Diese gefundene Zahl multiplicire durch den Hauptartickel, dessen Logarithmum du (n. 1.) von dem gegebenen abgezogen, Hier war er 10000. Das Product 84753200 ist die gesuchte Zahl.

§. 217. Anmerk. Eben so sucht, und findet man die Secunden für die Logar. der *sinuum* und *tangentium*, wo man es bey den Graden und Minuten nicht will beruhen laßen.

§. 218. Aufgabe. Die Zahl für einen Negativlogarithmus bestimmen, z. B. für — 1. 1945623.

Aufl. 1. Zieh den gegebenen Logarithmus von dem allerletzten, der in den Tafeln zu finden, ab.

2. Für den Rest suche die correspondirende Zahl. Diese wird nun der Zähler, und die Zahl des letzten Logarithmus der Nenner der gesuchten Fraction seyn.

Der letzte Log. in den Tafeln = 4. 0000000
Der gegebene = 1. 1945623

Der Rest. = 2. 8054377

Diesem Rest respondirt die Zahl 638, $\frac{91}{100} = \frac{63891}{100}$

Wenn

Wenn wir aber diesen Bruch für den Zähler annehmen, und seinen Nenner 10000 darunter schreiben (das ist) wenn wir ihn durch 10000 dividiren, wird der gesuchte Bruch $= \frac{63891}{1000000}$ seyn.

II. Abhandlung.

Von den allgemeinen zur Trigonometrie nöthigen Begriffen vorläufige Erinnerungen.

§. 219. Jedes Dreyecke hat 6 Theile: nämlich 3 Seiten, und 3 Winkel. Die Trigonometrie nun lehret uns, aus was immer für drey gegebenen oder bekannten solchen Theilen jede aus den drey übrigen Unbekannten durch die Rechnung finden.

§. 220. Die ganze Kunst aber bestehet in dem, daß wir die 3 bekannten Größen, so in eine geometrische Proportion bringen, daß die Gesuchte jederzeit die vierte Proportionalgröße werde. Es stehen aber die Seiten eines Dreyeckes nicht eben in genauer Proportion mit den Winkeln, welche die Zir-

kel-

kelbögen für ihr Maas haben. Man mußte also statt deren andere gerade Linien suchen, die mit den Seiten des Dreyeckes in Proportion stünden. Man hat sie auch gefunden, und sinus, tangentes, secantes &c. genennt. Die Figur soll uns diese Linien alle kennen lehren.

§. 221. Man beschreibe aus dem Puncte C (126. *Fig.*) des Winkels ACB einen willkührlichen Zirkel aHAG, und verlängere den Stral AC in a, aus dem Puncte C richte man die Perpendicularlinie CH auf.

§. 222. *Angulus complementi ad* 90° wird derjenige Winkel gennet, der mit einem anderen Winkel 90° Grad oder einen rechten Winkel ausmachet.

Angulus complementi ad 180° wird derjenige genennt, der sammt einem andern zween rechte Winkel, oder einen halben Zirkel ausmachet.

Es ist also der Winkel ICB der Angulus complementi, (Complementswinkel) des Winkels BCD zu 90°, oder dieser des erstern.

Der Winkel aCB aber ist der Complementswinkel des Winkels ACB zu 180°, oder wiederum dieser

des

des ersteren. Was hier von den Winkeln gesagt, ist eben so von den Bögen HB und BA, aB und BA rc. zu verstehen, die der besagten Winkeln Maase sind.

§. 223. Die vom äußersten Puncte eines Radius CB auf einen anderen Radius CA senkrecht gezogene Linie BD heißet der *sinus* des Bogens AB, oder des Winkels ACB.

Die am äußersten Puncte des Radius CA aufgerichtete Perpendicularlinie AE, bis an den Punct, wo sie der verlängerte Radius CB durchschneidet, wird *tangens*, oder die Tangente des nämlichen Bogens AB genennt, der verlängerte Radius CE aber *secans*, oder die Secante desselben.

AD, Der zwischen dem Sinus und seinem Bogen liegende Theil des Radius AC, nennt sich *sinus versus*, oder *sagitta* (der Pfeil)

BI Ist der *sinus complementi* des Bogens AB.
HK Ist der *tangens complementi* des näml.
HI Ist der *sinus versus complementi* davon.
CK Ist endlich sein *secans complementi*.

Diese gar zu lange Nämen dieser Linien hat man in der Trigonometrie verkürzet, und *cosinus*, *cotangens*, *cosinus versus*, *cosecans* dafür geschrieben.

Aus

Aus diesen vorausgeschickten Begriffen folget eine Menge wichtigster Lehrsätze von sich selbst, die darum keines Beweises mehr nöthig haben.

§. 224. I. Die stumpfen Winkel (wie aCB) haben für ihren *sinus*, *cosinus*, *tangens*, und *cotangens* die nämlichen Linien, die ihre scharfe Complementswinkel (ACB) haben. Denn die Perpendicularlinie, die wir vom äußersten Puncte B oder a der zween Stralen, die den stumpfen Winkel miteinander ausmachen, auf den Radius ziehen, kann ohnmöglich anderstwohin, als in D oder d fallen, und die Tangente kann keine andere, als ae seyn. Weil aber das Dreyeck aCd = BCD, und das Dreyeck Cae = CAE, so ist ad = BD und ae = AE. Weil überdas der Bogen BH der Complementsbogen von AB, und aB, so ist nothwendig BI der cosinus, und HK der cotang. von aB.

II. Der *sinus* von was immer für einen Bogen AB, ist jederzeit die halbe Senne des Bogens BAG, der eben nochmal so groß, als AB, ist.

III. Der größte *sinus* ist der sinus von 90°, oder von einem rechten Winkel, weil er der Radius selber

der ist. Er wird *sinus totus* genennt, und durch R ausgedrückt.

IV. Die *sinus* wachsen von 0 bis 90^{v} Grad mit den Winkeln, und von 90^{v} bis 180^{v} nehmen sie eben so wieder ab.

V. Der *sinus* von 30^{v} ist dem halben Radius gleich. Denn der Radius ist die Senne von 60^{v}. (§. 60.)

VI. Wie die Winkel von 0^{v} bis 90^{v}, so nehmen auch die Tangenten und Secanten zu, so, daß die Tangente sowohl, als die Secante von 90^{v} unbestimmt bleiben, und folglich unendliche Größen vorstellen, in dem sie nimmer zusammenlaufen, ausser (wie wir uns geometrisch ausdrücken) nach einer unendlichen Verlängerung beyder Linien.

VII. Die Tangente von 45^{v} ist jederzeit dem Radius des Zirkels gleich. Denn wenn der Winkel ACB $= 45^{v}$, so wird auch AEC $= 45^{v}$, und folglich AC $=$ AE seyn. (§. 20. n. 4)

VIII.

VIII. Jeder *sinus versus* AD eines Bogen AB der weniger als 90 hält, ist der Differenz gleich, die man bekömmt, wenn man den *cosinus* vom Radio abzieht;

Denn es ist AD = CA − CD.
Es ist aber der Cos. = BI = CD.
Folglich ist AD = AC − BI.
Das ist: Sin. v. = R − Cos.

§. 225. **Anmerk.** Ich habe schon oben erinnert, daß wir uns um die Einrichtung der Logarithmustafeln so sehr nicht mehr zu bekümmern haben, nachdem unsere lieben Voreltern für uns gearbeitet. Und wenn man nur obenhin bedenken will, daß die Dreyecke CBD, ACE, CIB, CHK rc. lauter rechtwinkelichte Dreyecke seyn, wird man leicht wahrnehmen, daß man für jeden gegebenen Bogen alles habe finden können, wenn nur eine aus diesen vier Größen: sinus, cosinus, sinus versus, cosinus versus, bekannt war. Denn man sieht von sich selbst, daß in unserer Figur z. B.

$$CD = \sqrt{CB^2 - BD^2}$$
Das ist $\text{Cos.} = \sqrt{R^2 - \text{Sin}^2}$

$$DA = CA - CD$$
Das ist Sin. vers. = R − Cos.

$$HI = CH - CI$$
Das ist Cos. vers. = R − Sin.

$$BD = \sqrt{CB^2 - CD^2}$$

Das ist $Sin. = \sqrt{R^2 - Cos^2}$

$$CE = \sqrt{CA^2 + AE^2}$$

Das ist $Sec. = \sqrt{R^2 + Tang^2}$

$$AE = \sqrt{CE^2 - AC^2}$$

Das ist $Tang. = \sqrt{Sec^2 - R^2}$

$$BD : CD = AE : AC$$

Das ist $Sin. : Cos. = Tang : R.$ und so weiter.

Dieß kann auch schon hinlänglich seyn für einen Anfänger, um sich von Ausrechnung der Sinustafeln einen Begriff wenigst in die Ferne zu machen. Wir wollen jetzt lieber zu den Gründen der trigonometrischen Rechnung selber schreiten.

III. Abhandlung.

Gründe der trigonometrischen Ausrechnung der Dreyecke.

§. 226. I. Lehrsatz. In jedem geradlinichten Dreyecke ABC (127. *Fig.*) verhalten sich die *sinus* der Winkel gegeneinander, wie die den Winkeln entgegengesetzte Seiten.

Be-

Beweis. Wenn man um was immer für ein Dreyeck ABC einen Zirkel beschreibt, so sind die drey Seiten Sennen der Bögen AB, BC, AC, ihre Hälften aber sind lauter *sinus* der halben Bögen, oder der entgegengesetzten Winkeln.

$$\text{Weil nun } AB : BC = \frac{AB}{2} : \frac{BC}{2}$$

So ist AB : BC = Sin. des Winkels C : Sin. des Winkels A.

§. 227. Hieraus können wir drey wichtige Folgen ziehen. I. Weil der sinus eines rechten Winkels der Radius selber ist, und die dem rechten Winkel entgegengesetzte Seite die Hypothenuse, so verhält sich in jedem rechtwinkelichten Dreyecke der Radius zur Hypothenuse, wie der Sinus eines jeden scharfen Winkels zu der ihm entgegengesetzten Seite.

Erklärung. In dem rechtwinkelichten Dreyecke ist.

S. r : S. n = AC : AB (128. *Fig.*)

Dahero S. r : AC = S.n. : AB = S m : BC.

Das ist Rad. : hyp = S.n. : AB = S.m : BC.

II. In jedem rechtwinkelichten Dreyecke ist der sinus des einten scharfen Winkels jederzeit dem cosinus des anderen scharfen Winkels gleich.

Das ist Sin. m = Cos. n

Erklärung. Der Peripheriewinkel n (129. *Fig.*) ist = dem Centralwinkel o, weil sie beyde die Hälfte des Bogens AB für ihr Maas haben.

Es ist aber o = p

Folglich p = n

Nun ist der sinus des Winkels $m = \frac{BC}{2} = Bf$, welches ja eben der cosinus des Winkels p oder n ist. Eben so läßt sichs erklären, daß der sinus des Winkels n zugleich der cosinus des Winkels m sey.

Es verhält sich dahero jederzeit im rechtwinkelichten Dreyecke der sinus des einten scharfen Winkels m zu seinen cosinus, wie die ihm entgegengesetzte Seite BC zu der anderen Seite AB.

Es ist aber Sin : Cos = Tang : R. (§. 225.)

III. Dahero in dem rechtwinkelichten Dreyecke die Tangente des einten scharfen Winkels m sich zum Radius verhält, wie die ihm entgegengesetzte Seite BC zu AC.

IV.

IV. Wenn uns die drey Winkel eines Dreyeckes bekannt sind, ist uns zwar auch das Verhältniß der Seiten bekannt: die Größe oder Länge einer jeden Seite insonderheit aber ist darum noch nicht bestimmt; indem ähnliche Dreyecke zwar gleiche Winkel, nicht aber auch allzeit gleiche Seiten haben müßen.

§. 228. II. **Lehrsatz.** In jedem Dreyecke ABC (130. *Fig.*) verhält sich die größte Seite AC zur Summe der zwo übrigen Seiten AB + BC wie ihre Differenz AB — BC zur Differenz der Segmente der größten Seite AE und CE, welche entstehen, wenn wir aus dem größten Winkel B die Perpendicularlinie BE auf die größte Seite AC ziehen.

Wir müßen also erweisen, es sey im Dreyecke ABC
$AC : AB + BC = AB - BC : AE - CE.$

Beweis. Wenn wir aus dem Puncte B mit der kleinsten Seite BC als dem Radius einen Zirkel beschreiben, und AB bis in G verlängern.

So ist $AG = AB + BC$
Und $Ap = AB - BC$
Und $AD = AE - CE.$

Nun aber ist in unserer Figur

AC:AG = Ap:AD (Geom. § 44.)

das ist AC : AB+BC=AB—BC:AE—CE. w. z. e.

§. 229. III. **Lehrsatz.** Im jedem Dreyecke ABC (131. *Fig.*) verhält sich die Summe jeder zwoer Seiten AB, BC zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe ihrer entgegengesetzten Winkel n + s, und p, zu der Tangente ihrer halben Differenz.

Diesen so nöthigen Lehrsatz zu erweisen, müßen wir eine kleine Zubereitung voraus setzen. Aus dem Puncte B mit der kleineren Seite BA beschreibe man einen Zirkel, und ziehe die Linie DA, und die ihr parallellaufende Cf. CB aber verlängere man bis in E, und ziehe die Linie Ef, so ist sowohl EAD, als der ihm gleiche innere EfC ein rechter Winkel.

Weil nun in dem Dreyecke EfC die Linie AD mit der Grundlinie fC parallel läuft, so ist

ED : DC = EA : Af (Geom. §. 31. 32.)

Und folglich ED + DC : DC = EA + Af : Af. (Allg. §. 103.)

Das ist EC : DC = Ef : Af.

Man sieht aber leicht, daß EC = AB + BC oder die Summe, und DC = BC — AB, oder die Differenz der Seiten sey. Wir

Wir haben dahero nur noch zu erweisen, daß Ef die Tangente der halben Summe, Af aber die Tangente der halben Differenz der Winkel BAC und BCA sey.

Wenn wir nun fC für den Radius annehmen, so sieht man von sich selbst, daß Ef die Tangente des Winkels p + r und Af die Tangente des Winkels r sey.

Wir müßen also nur noch erweisen, daß der Winkel p + r die halbe Summe, und der Winkel r die halbe Differenz der gegebenen Winkel seyn. Hier steht der Beweis.

Die ganze Summe beeder Winkeln n + s + p ist = m dem äußern (Geom. §. 23.)

$$m = o + n$$

$$o = n \quad \text{(Geom. §. 20. n. IV.)}$$

$$m = 2o$$

$$\frac{m}{2} = o$$

$$o = p + r \quad \text{(Geom. §. 13. n. I.)}$$

$$\frac{m}{2} = p + r$$

welches das erste war.

Die ganze Differenz beeder Winkeln
ist $= n + s - p$.

Nun ist

$$o = n$$
$$o = p + r$$
$$n = p + r$$
$$r = s \quad \text{Wechselwinkel.}$$
$$n = p + s$$
$$n + s = p + 2s$$
$$n + s - p = 2s = 2r$$
$$\frac{n + s - p}{2} = s = r \quad \text{welches das 2te.}$$

Es ist demnach in jedem Dreyecke ꝛc.

IV. Abhandlung.

Aufgaben über die trigonometrische Berechnung des rechtwinkelichten Dreyeckes.

§. 230. I. Aufabe. Aus den gegebenen zwoen Seiten AB, BC (132. *Fig.*) die Winkel A und C finden.

Aufl. $AB : BC = R : T. A.$ Dahero auch der Winkel C im rechtwinkelichten Dreyecke bekannt.

§. 231

§. 231. II. Aufgabe. Aus der gegebenen Seite AB (133. *Fig.*) und der Hypothenuse AC die nämlichen Winkel finden.

Aufl. AC : AB = R : Sin. C. Daher auch der Winkel A bekannt.

§. 232. III. Aufgabe. Aus einer gegebenen Seite AB (134. *Fig.*) und einem Winkel A die andere Seite BC rc. finden.

Aufl. R : T. A = AB : BC.

§. 233. IV. Aufgabe. Aus einer gegebenen Seite AB und einem Winkel C die Hypothenuse AC finden.

Aufl. Sin. C : R = AB : AC. (133. *Fig.*)

Anmerk. Weil man alle übrigen Berechnungen des rechtwinkelichten Dreyeckes auf eine aus diesen vier Proportionen oder Analogien bringen kann, können wir uns mit diesen 4 Aufgaben schon begnügen.

V. Abhandlung.

Aufgaben über die Berechnung des schiefwinkelichten Dreyeckes.

§. 234. I. Aufgabe. Aus den gegebenen Winkeln A, B, C (135. *Fig.*) und einer Seite AB die zwo übrigen AC und BC finden.

Aufl. Sin. C : Sin. A = AB : BC.
Und wiederum Sin. C : Sin. B = AB : AC.

§. 235. II. Aufgabe. Aus den gegebenen drey Winkeln A, B, C alle Seiten finden.

Aufl. Sin. C : Sin. A = AB : BC.
Und Sin. C : Sin. B = AB : AC.

Anmerk. Man findet zwar aus den gegebenen Winkeln das Verhältniß der Seiten untereinander, nicht aber ihre wahre Länge. Um diese zu finden, ist nöthig, daß wenigst die Länge von einer aus den drey Seiten in Ruthen, Schuhen, oder Zollen bekannt sey, wie wir schon oben §. 227. n. IV. erinnert haben.

§. 236. III. Aufgabe. Aus gegebenen zwoen Seiten AB, BC, und einem entgegengesetzten Winkel C die zween andere Winkel A und B finden.

Aufl.

Aufl. AB : BC = Sin. C : Sin. A.

Weil aber jeder Winkel den nämlichen sinus hat, den sein Complentswinkel zu 180^{v}, muß man wissen, ob A ein scharfer oder stumpfer Winkel sey.

§. 237. IV. **Aufgabe.** Aus den gegebenen Seiten AB, BC und dem entzwischen liegenden Winkel B die zween andere Winkel A und C finden.

Aufl. $BC+AB : BC-AB = T.\frac{A+C}{2} : T.\frac{A-C}{2}$

und so bekömmt man die Differenz der Winkeln A, und C. Es ist aber auch ihre Summe bekannt, weil wir den Winkel B wissen, und wir werden ja die allgebraische Aufgabe (Allg. §. 48.) noch nicht vergessen haben: aus der gegebenen Summe zwoer Grössen und ihrer Differenz die Größen selber finden.

§. 238. V. **Aufgabe.** Aus den gegebenen drey Seiten AB, BC, AC, (136. *Fig.*) die Winkel A, B, C selber finden.

Aufl. Man ziehe zuerst die Perpendicularlinie AE, und suche die Segmente der größten Seite BE und CE (§. 228.) so bekömmt man zwey rechtwinkelichte Dreyecke, in welchen nebst dem rechte Winkel immer noch zwo Seiten bekannt sind, dahero man die übrigen Winkel nach den Aufgaben der vorigen Abhandlungen findet.

An=

Anhang.

Kurze Abhandlung von den Kegelschnitten.

Ich würde diese Abhandlung gar weggelaßen haben, wenn ich nicht auch für die Herren Artilleristen schrieb, die in ihren Operationen so oft mit der Parabel zu thun kriegen. Man muß aber hier keine vollkommene Abhandlung von den Kegelschnitten erwarten: sie wäre zu weitläufig, zu hoh, und zu tiefsinnig, als daß sich der gemeine Mann damit aufhalten sollte. Niemal wars mein Vorhaben, aus den Herren Artilleristen große Mathematicker, wohl aber brauchbare Männer zu gestalten, und ihnen den Weg zu öffnen, wenn sie selbst wollen, und Zeit finden, große Mathematicker zu werden. Ich werde ihnen dahero in diesem kurzen Anhange von den Kegelschnitten überhaupt, und in Sonderheit von ihrer Parabel nur so viel sagen, als eben nöthig ist, daß sie die im zweyten Theile vorkommende practische Aufgaben

ben beßer als andere verstehen, denen ihre Parabel nur dem Namen und dem Gesichte nach bekannt ist.

I. Abschnitt.

Vorläufige Erklärungen.

§. 239. Bilden wir uns ein, eine unbestimmte Linie MAB (137. *Fig.*) bewege sich um den unbeweglichen Punct A so, daß der äußerste Punct B die ganze Zirkelperipherie BEdfB durchlaufe, so wird zu gleicher Zeit der andere äußerste Punct M eine Zirkelperipherie MoNpM, oder der Punct m die Peripherie msnrm ꝛc. durchlaufen. Beyde Oberflächen, welche diese Linie in ihrer Bewegung beschreibt, werden conische Oberflächen, der dichte Körper aber ein *conus*, oder Kegel genennt, und zwar *conus rectus* ein aufrechter Kegel, wenn der Punct A senkrecht ober den Punct C ist, von dem wir allein hier reden werden.

§. 240. Der Punct A heißt (*vertex*) der Gipfel des Kegels, der Zirkel BEDf seine Grundfläche: Die Linie AB ist (*latus coni*) die Kegelsseite, die

vom

vom Gipfel A durch den Mittelpunct der Grundfläche gezogene Linie AC aber seine Achse.

§. 241. Wenn nun eine ebene Fläche diesen Kegel unterhalb seinem Gipfel A durchschneidet, entspringen verschiedne neue Flächen, deren Umfange lauter krumme Linien sind, die wir *curvas conicas* nennen. Ihre Namen und Unterschied werden durch die Lage derjenigen Fläche bestimmt, die den Kegel durchschneidet.

§. 242. Läuft diese Fläche mn (138. *Fig.*) mit der Grundfläche des Kegels parallel, so wird der Umfang der Section mnop eine Zirkelperipherie seyn.

§. 243. Läuft die Fläche mn (139. *Fig.*) oder die Section mit der Kegelsseite AB parallel, wird der Umfang der neuen Fläche eine Parabel genennet.

§. 244. Macht aber die Fläche mn (140. *Fig.*) mit der Grundfläche des Kegels so einen Winkel s, daß sie auch die Kegelsseite Ad in n durchschneidet, und auf die verlängerte Grundfläche Bd fällt, nennt man die Section eine Elipse.

§. 245. Läuft endlich die Fläche mn (141. *Fig.*) mit der Achse des Kegels parallel, oder durchschneidet

det sie die einte Kegelsseite AC so in m, daß, wenn sie verlängert wird, sie auch die andere verlängerte Seite AB ober dem Scheitelpuncte A in f durchschneidet, heißet die Section eine Hyperbole, und hiemit ihr Umfang eine hyperbolische Linie.

§. 246. Jede aus diesen krummen Linien hat seine entscheidende Kennzeichen und Eigenschaften, und in dem allgebraischen Ausdruck solcher Eigenschafte bestehet die ganze Natur dieser krummen Linien. Diese aber zu entdecken, setzen die Mathematicker zwo parallellaufende Linien MP, mp, (142. *Fig.*) die sie *semiordinatas* oder Halbeordinaten nennen.

§. 247. Es ist demnach eine *semiordinata* jede gerade Linie, die von was immer für einen Puncte der krummen conischen Linie auf die Linie AP*p*, die wir den Diameter heißen, gezogen wird.

§. 248. Es ist also jede gerade Linie, welche die ganze Ordinaten in zween gleiche Theile schneidet, ein Diameter.

Schneidet er sie auch zugleich senkrecht, so heisset er die Achse der conischen Linie.

§. 249. Jede Achse ist also ein Diameter, nicht aber jeder Diameter ist eine Achse.

§. 250.

§. 250. Die Theile des Diameters, wie AP, Ap ꝛc. werden *abscissæ*, oder *Pfeile*, der bestimmte Punct A aber ihr Anfang (origo abscissarum) genennt.

§. 251. Es ist folglich jeder zwischen dem Puncte A und einer semiordinata liegende Theil des Diameters eine abscissa.

§. 252. Die *Function* einer Größe wird alles dasjenige genennt, was uns z. B. die Größe a nicht als eine *einfache*, sondern immer als eine aus mehrern *zusammengesetzte* Größe betrachten läßt, heißet also jede *Potenz*, jede *Wurzel*, jede *Summe*, jede *Differenz*, jedes *Product*, jeder *Quotient* ꝛc. der Quantität a eine *Function* derselben.

§. 253. Das *unveränderliche Verhältniß*, welches eine bestimmte Function einer Abscisse zu einer gleichfalls bestimmten Function einer Ordinate hat, bestimmt die Gattung der krummen conischen Linie, und erkläret uns, ob sie eine Zirkel, eine parabolische, eliptische oder hyperbolische Linie sey.

§. 254. Jede allgebraische Gleichung, wodurch dieß Verhältniß ausgedrückt wird, heißet *æquatio*

ad

ad curvam, eine Gleichung zur conischen Linie. Ein Beyspiel vom Zirkel soll die Sache deutlich machen.

In was immer für einem Zirkel ist jede aus was immer für einem Puncte der Peripherie auf dem Diameter bd (143. *Fig.*) senkrecht gezogene Linie mn die mittlere Qroportional zwischen den Segmenten des Diameters. Es ist demnach $\overline{nm}^2 = bm \times md$.

Um uns nun hierüber allgebraisch auszudrücken,

Sey die Semiordinate $nm = y$

Die kleinere Abscisse $bm = x$

Der Radius $cd = a$

So ist der Diameter $bd = 2a$

Und die größere Abscisse $md = 2a - x$

Dahero $x : y = y : 2a - x$.

Folglich $y^2 = 2ax - x^2$ welches *æquatio ad circulum*, die Gleichung zum Zirkel ist.

Noch eine andere erhalten wir, wenn wir nur setzen, es sey $mc = x$.

Denn so ist die kleinere Abscisse $bm = a - x$.

Und die größere $md = a + x$.

Dahero $a - x : y = y : a + x$.

Und folglich $y^2 = a^2 - x^2$

II. Abschnitt.
Von der Parabel.

§. 255. Wenn wir aus dem Puncte D (144. *Fig.*) der geraden Linie De eine Perpendicular Dp ziehen, in der wir den willkührlichen Punct F bestimmen, und aus was immer für angenommenen Puncten g, h, e ꝛc. der Linie De mit Dp parallellaufende Linien ziehen, wie gC, hI, e q und in jeder dieser Linien einen Punct erwählen, wie m, n, q ꝛc. so, daß mg=mF, nh=nF, e q=qF ꝛc. sey, wird die krumme Linie A m n q ꝛc. die durch diese Puncte läuft, eine Parabel seyn; der Punct A wird *summitas parabolæ*, der Gipfel, die Linie Ap die Achse, und hier zugleich ein Diameter, der Punct F der *focus*, oder Brennpunct der Parabel, die Linie De *directrix*, die Leitlinie genennt.

§. 256. Es ist also die Parabel eine krumme Linie, deren alle Puncte A, m, n, q ꝛc. von dem Brennpuncte F eben so weit, als von der Leitlinie De abstehen.

§. 257. Weil nun auch der Punct A ein Punct der Parabel ist, muß nothwendig jederzeit DA=AF

seyn,

seyn, und aus allen Puncten der Parabel ist die Entfernung des Punctes A von der Leitlinie die kleinste: und weil mC, nI, ꝛc. lauter diametri sind, sieht man schon, daß man so viel diametros ziehen könne, als viele Puncte in der Parabel sind, deren jeder seine correspondirende Ordinate hat.

§. 258. Wenn man auf dem Puncte A der Linie Ap eine Perpendicular aufrichtet, und sie $= 4$ AF machet, heißet diese Linie AB der Parameter, und folglich ist der Abstand des Brennpuncts F vom Gipfel A jederzeit der vierte Theil des Parameters.

§. 259. Aufgabe. Eine Parabel beschreiben.

Aufl. Man setze, wie zuvor die Linien Dw, Dp senkrecht aneinander, und bestimme nach Belieben den Punct F. (145. *Fig.*)

2. Ziehe man aus was immer für Puncten der Linie Dw die mit Dp parallellaufende Linien rs, tv, wx, ꝛc.

3. Theile man nach und nach Fr, Ft, Fw ꝛc. in zween gleiche Theile ab, und ziehe auf rF die Perpendicular dn ꝛc, wo diese die erste Parallellinie rs in d schneidet, dort ist der zweyte Punkt der Parabel, Und so bekömmt man so viel Punkte d, e, f, ꝛc.

als man Parallelen gezogen. Die durch diese Punkte laufende Linie aber, ist die begehrte Parabel.

Beweis. Weil das Dreyeck d n r = d n F, ist d r = d F. folglich ist d ein Punkt der Parabel (§. 256) Eben so wird erwiesen, das e und f, Punkte einer parabolischen Linie seyn, die von dem Brennpunkte F eben so weit, als von der Leitlinie Dw entfernet sind.

§. 260. **Lehrsatz.** Das Quadrat einer jeden Semiordinate an der Achse wie MP, (146. *Fig.*) ist gleich dem Producte aus dem Parameter der Achse und der correspondirenden Abscisse *AP*.

Das ist: Es sey M P = y
A P = x
der Parameter = a
So sage ich, es sey $y^2 = a x$

Beweis. Es sey ferner A F = m,
So ist M F = M E
Es ist aber M E = P A + A D
Das ist M E = x + m
Dahero P F = x — m.

Nun ist $\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PF}^2$
Das ist $(x+m)^2 = y^2 + (x-m)^2$
oder $x^2+2mx+m^2 = y^2+x^2-2mx+m^2$

Wenn

Wenn wir nun $x^2 + m^2$ beyderseits wegnehmen, bleibt $2mx = y^2 - 2mx$

Dahero $4mx = y^2$

Es ist aber $4m = a$ (§. 258.)

Folglich $4mx = ax$

Und endlich $y^2 = ax$. w. z. e. und eben dieß ist æquatio ad parabolam, die Gleichung zur Parabel.

§. 261. Aus dieser einzigen Gleichung aber können wir durch die bloße Rechnung eine Menge Lehrsätze über die Eigenschaften der Parabel für verschiedene Fälle herausnehmen.

I. In jeder Parabel ist der Parameter die dritte Proportionalgröße zur Absciße, und der halben Ordinate.

Beweis. Weil $y^2 = ax$

So ist $\frac{y^2}{x} = a$

Folglich $\div\!\!\div$ x . y . a . w. z. e.

II. Jede Absciße ist die dritte Proportionalgröße zum Parameter und der halben Ordinate.

Beweis. Weil $y^2 = a\,x$

So ist $\div\!\!\div a \,.\, y \,.\, x$ und eben darum ist

III. Jede Semiordinate die mittlere Proportionalgröße zwischen dem Parameter und der Abscisse.

IV. Wenn die Abscisse dem Parameter gleich ist, wird auch die Semiordinate demselben gleich seyn.

Beweis. Weil $x = a$

So ist $y^2 = a^2$

Hiemit $y = a$

V. Wenn die Abscisse dem halben Parameter gleich ist, so wird die Semiordinate die mittlere Proportionalgröße zwischen dem ganzen Parameter, und dessen Hälfte seyn.

Beweis. Weil $x = \frac{a}{2}$

So ist $y^2 = \frac{a^2}{2}$

$y = \sqrt{\frac{a^2}{2}}$

Da-

Dahero $\div\, a \,.\, y \,.\, \frac{a}{2}$. w. z. e.

VI. Wenn die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist, so ist die Abscisse der vierte Theil des Parameters.

Beweis. Weil $y = \frac{a}{2}$

So ist $ax = \frac{a^2}{4}$

Dahero $x = \frac{a}{4}$. w. z. e.

Anmerk. Weil jener Punkt der Achse, in welchem die Semiordinate dem halben Parameter gleich ist, der Focus, oder Brennpunkt genennt wird, so ist in jeder Parabel der Abstand des Brennpunkts F vom Scheitelpunkte A dem vierten Theil des Parameters gleich. Dahero

VII. Der Abstand des Brennpunktes vom Scheitlpunkte die dritte Proportionalgröße zum Parameter und der Semiordinate ist.

Beweis. Weil hier $x = \frac{a}{4}$

So ist $y^2 = \frac{a^2}{4}$

Folglich $a : y = y : \frac{a}{4}$ w. z. e.

VIII. Das Quadrat einer jeden Semiordinate *MP* (147. *Fig.*) ist viermal so groß als das *Rectangulum*, welches entstehet, wenn wir den Abstand des Brennpunktes vom Scheitlpunkte durch die correspondirende Abscisse multipliciren.

Beweis. Weil $AF = \frac{a}{4}$

So ist $AF \times AP = \frac{ax}{4}$

Es ist aber $y^2 = ax$. das ist, viermal so groß. w. z. e.

IX. Der Abstand des Brennpunkts vom Scheitlpunkte ist die dritte Proportionalgröße zu was immer für einer Abscisse, und zur Hälfte der correspondirenden Semiordinate.

Be-

Beweis. Weil $y^2 = ax$

So ist $\frac{y^2}{4} = \frac{ax}{4}$

Dahero $x : \frac{y}{2} = \frac{y}{2} : \frac{a}{4}$. w. z. e.

§. 262. Lehrsatz. In jeder Parabel verhalten sich die Quadrate der Semiordinaten gegeneinander, wie die correspondirenden Abscissen.

Beweis. Es sey $MP = y$
$QR = z$
$AP = x$
$AR = v$

So ist $y^2 = ax$
$z^2 = av$

Hiemit $y^2 : z^2 = ax : av = x : v$.

Anmerk. Aus diesem Lehrsatze können wir wieder eine Menge anderer herausziehen, wowon wir aber nur diejenigen hier anführen wollen, die zu unserm Vorhaben nothwendig, oder doch nützlich sind, und auf die wir uns im zweyten Theile dieses Werkes beziehen werden.

§. 263. I. Alle Theile einer parabolischen Linie, wie *AMQ* (147. *Fig.*) sind krumme Linien.

Beweis. Wenn der parabolische Theil *AMQ* eine gerade Linie wäre, so wäre folgende Proportion richtig.

$$MP : QR = AP : AR \text{ (§.32.IV.)}$$

Das ist: $y : z = x : v$

Es ist aber $y^2 : z^2 = x : v$

So ist denn AMQ keine gerade, folglich eine krumme Linie.

§. 264, II. Jede Parabel entfernet sich immerzu weiter von ihrer Achse, je länger sie fortgezogen wird. (147. *Fig.*)

Beweis. $\overline{MP}^2 : \overline{QR}^2 = AP : AR.$ Es nehmen dahero, wie die Abscissen AP, AR *rc.* also auch die Ordinaten MP, QR fort und fort zu. Ist also $QR > MP$, wie $AR >$ ist als AP.

§. 265. III. Wenn wir dahero eine mit der Achse *AR* parallellaufende Linie *ar* ziehen, wird diese die Parabel nur in einem einzelen Punkte *m* durchschneiden, und durch die parabolische Fläche *AQR* laufen, weil sich der übrige Theil mMQ wie von AR, also auch von ar immer weiter entfernet.

§. 266.

§. 266. IV. Wenn man in einer Parabel was immer für eine Chorde *M m* ziehet, (148. *Fig.*) und sie, wenn es vonnöthen, verlängert, wird sie die ebenfalls etwann verlängerte Achse *AR* in einem Punkte *T* durchschneiden.

Beweis. Die Linie T m M durchschneidet die Parabel in zween Punkten M und m. sie läuft also mit A R nicht parallel (§. 264.) es müßen sich dahero diese zwo Linien, wenn sie verlängert werden auf einer Seite, wo immer, einander schneiden, w. z. e.

§. 267. V. Eine auf die Parabel gezogene Tangente *m M* (149. *Fig.*) wenn sie gegen *T* verlängert wird, wird sie die Achse *A R* in einem Punkte *T* durchschneiden: und zwo Tangenten, die auf der nämlichen Seite sich befinden, wie *T m M*, und *t m s* werden sich jederzeit in einem Punkte *m* einander durchschneiden.

Beweis. Entweder muß die Tangente, und die Achse auf einer Seite zusamm, oder sie müssen beyde Parallel laufen. Sie laufen aber nicht parallel; sonst müßte die Linie *T M* durch die parabolische Fläche gehen (§. 265.) welches wider die Natur einer Tangente ist. Sie schneidet also die Achse. w. das erstere war.

Es müssen aber auch die zwo Tangenten entweder parallel miteinander laufen, oder in einem Punkte m einander schneiden. Sie können aber nicht parallel seyn; denn sonst müßten, wie der Punkt n, also auch alle übrigen Punkte der Tangente T m n M unterhalb der Tangente t m s stehen, und folglich die Tangente durch die parabolische Fläche laufen, welches eben wieder ohnmöglich. Und dieß war das zweyte, w. z. e.

§. 268. VI. **Aufgabe. Aus einer gegebenen Parabel und ihrer Achse ihren Parameter finden.**

Auflösung. Man ziehe aus dem Scheitelpunkte A die Chorde AN, und richte auf den Punkt N die Perpendicularlinie NB auf, welche die Achse in einem Punkte B durchschneiden wird. Zieht man nun die halbe Ordinate NF, so wird FB der gesuchte Parameter seyn.

Beweis. Weil ANB ein rechter Winkel ist, so ist AF : FN = FN : FB, (§. 34. n. I.) das ist x : y = y : a (§. 261. n. I.) w. z. e.

Eine andere Auflös. Man ziehe die Chorde AM (151. *Fig.*) so, daß sie bey A mit der Achse einen Winkel von 45 mache, und alsdenn ziehe man die halbe Ordinate

nate P M, so wird A P = P R der gesuchte Parameter seyn. (§.261.n.IV.) denn es ist AP : PM = PM : PR.

§. 269. VII. Wenn man von was immer für einem, außerhalb dem Scheitlpunkte *A* angenommenen Punkte *H* eine Perpendicular *HD* auf die ganze Ordinate *MC* herabläßt, bekömmt man jederzeit $MC \times DC = HD \times a$

Beweis. $MD \times DC = \overline{MP + PD} \times \overline{PC - PD}$.

Es ist aber $MP = PC$

Dahero $MD \times DC = \overline{MP + PD} \times \overline{MP - PD}$

$= \overline{MP^2} - \overline{PD^2}$

Und weil $PD = GH$

So ist I. $\overline{MD \times DC} = \overline{MP^2} - \overline{GH^2}$

Nun ist in jeder

Parabel $y^2 = ax$ (§. 262.)

Das ist $\overline{MP}^2 = \overline{AP \times a}$

Und $z^2 = av$ (§. 262.)

Das ist $\overline{GH}^2 = \overline{AG \times a}$

Dahero $\overline{MP^2 - GH^2} = \overline{AP - AG} \times a$

$= GP \times a$

$= HD \times a$

N°. I. Hatten wir $\overline{MP^2} - \overline{GH^2} = MD \times DC$

So ist denn auch II. $HD \times a = MD \times DC$. w. z. e.

§. 270.

§. 270. Hieraus ziehen wir nun folgende Proportion $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$.

Denn es ist $\overline{MP}^2 = AP \times a$

Und $MD \times DC = HD \times a$

Dahero $\overline{MP}^2 : MD \times DC = APa : HDa$
$= AP : HD$.

§. 271. VIII. Wenn im Gegentheile was immer für eine gerade Linie MC durch eine Perpendicular *AP* in zween gleiche Theile und durch noch eine andere Perpendicular *HD* in einem anderen Punkte *D* so getheilet ist, das $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$ sey, so werden die Punkte *M*, *A*, *H*, C Punkte einer Parabel seyn, die *AP* für ihre Achse hat.

Beweis. Aus dem vorhergehenden Beweis

N°. I. ist $MD \times DC = \overline{MP}^2 - \overline{GH}^2$.

Und $HD = AP - AG$.

Wir setzen aber hier, es seye $\overline{MP}^2 : MD \times DC = AP : HD$.

So ist $\overline{MP}^2 : \overline{MP}^2 - \overline{GH}^2 = AP : AP - AG$

Folglich ist $\overline{GH}^2 : \overline{MP}^2 = AG : AP$.

Hie-

Hiemit sind M, A, H, C Punkte zur Parabel. (§. 262.) w. z. e.

§. 272. Aufgabe. Die Größe einer geraden Linie *FM* bestimmen, die man aus dem Brennpunkte *F* (153. *Fig.*) auf den äußersten Punkt *M* einer halben Ordinate *pM* zieht.

Auflösung. Es sey $Ap = x$

$$AF = \frac{a}{4} \quad (\S. 258.)$$

So ist $Fp = x - \frac{a}{4}$

$$Mp = y$$

Nun ist $\overline{FM}^2 = \overline{Fp}^2 + \overline{pM}$, das ist $FM^2 = (x - \frac{a}{4})^2 + y^2$

Das ist $\overline{FM^2} = x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16} + y^2$

Es ist aber $y^2 = ax$ (§. 260.)

Dahero $\overline{FM^2} = x^2 - \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16} + ax$

Das

Das ist $\overline{FM}^2 = x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{a^2}{16}$

Wovon die Quadratwurzel $= x + \frac{a}{4} = FM$. w. z. e. welches ohngefehr so viel heißet, als: jede gerade Linie, die man aus dem Brennpunkte einer Parabel auf den äußersten Punkt einer halben Ordinate ziehet, ist gleich der Summe aus dem vierten Theil des Parameters, und der dieser Ordinate correspondirenden Abscisse.

§. 273. Aufgabe. Die Größe einer Senne bestimmen, die man vom Scheitlpunkte der Parabel auf den äußersten Punkt *M* (154. *Fig.*) einer halben Ordinate *PM* gezogen.

Auflösung. $\overline{AM}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PM}^2$ (§.34.n.III.)

Das ist $\overline{AM}^2 = x^2 + ax$

Dahero $AM = \sqrt{x^2 + ax}$, welches so viel heißet: Jede Senne, die wir vom Scheitlpunkte einer Parabel auf den äußersten Punkt einer Ordinate ziehn, ist die mittlere Proportionalgröße zwischen der correspondirenden Abscisse, und der Summe

me aus der nämlichen Abscisse und dem Parameter. Hier steht die Analogie.

$$x : AM = AM : a + x.$$

§. 274. Aufgabe. Die Größe des rechtwinklichten Parallelogramms bestimmen, welches entsteht, wenn wir die Summe der halben Ordinaten *PM* + *pm* (155. *Fig.*) durch ihre Differenz *Rm* multipliciren.

Auflösung. $Rm = pm - PM.$

Dahero $\overline{PM+pm} \times Rm = \overline{PM+pm} \times \overline{pm-PM}.$

Es ist aber $\overline{PM+pm} \times \overline{pm-PM} = \overline{pm}^2 - \overline{PM}^2.$

Es sey nun $AP = x$ So ist $\overline{PM}^2 = ax$

$Ap = z$ Und $\overline{pm}^2 = az$

Dahero $\overline{pm}^2 - PM^2 = az - ax = (z - x) \times a.$

Es ist demnach das gesuchte Parallelogramm dem Producte gleich, welches wir erhalten, wenn wir die Differenz der Abscissen durch den Parameter multipliciren.

§. 275. Aufgabe. Die Größe des rechtwinklichten Parallelogramms aus einer halben Ordinate in ihre correspondirende Abscisse bestimmen.

Auflösung. Es sey die halbe Ordinate = y
Die Abscisse = x

Weil $y^2 = ax$

So ist $x = \frac{y^2}{a}$

Wenn wir nun beyderseits durch y multipliciren, bekommen wir

$$xy = \frac{y^3}{a}$$

Es ist dahero das gesuchte Parallelogramm die vierte Proportionalgröße zum Parameter, zur halben Ordinate, und zu ihrem Quadrate.

Die Analogie ist diese $a : y = y^2 : xy$.

§. 276. **Aufgabe.** Die Größe des rechtwinklichten Parallelogramms aus einer Abscisse in die andere finden. (155. *Fig.*)

Auflösung. Es sey die Abscisse $AP = x$
$Ap = v$
Die Ordinate $PM = y$
$pm = z$

So ist $x = \frac{y^2}{a}$ und $v = \frac{z^2}{a}$

Dahero $xv = \frac{y^2 z^2}{a^2}$.

Es

Es ist also das gesuchte Parallelogramm die vierte Proportionalgröße zum Quadrat des Parameters, zum Quadrat der einten, und zum Quadrat der andern Ordinate. Hier ist die Analogie:

$$a^2 : y^2 = z^2 : xv.$$

§. 277. **Aufgabe.** **Die parabolische Linie für was immer für einen gegebenen Parameter bestimmen und beschreiben.**

Auflösung. Es sey der gegebene Parameter AC (156. *Fig.*) Zieh die unbestimmte Linie AQ, die wir für die Achse annehmen, dero Scheitlpunct in A ist.

Diese Linie AQ theile in gleiche oder ungleiche Theile in den Puncten P, E, B ꝛc. In diesen Puncten richte die Perpendicularlinien PM, EN ꝛc. auf, so, daß jede zwischen dem gegebenen Parameter AC und der correspondirenden Abscisse die mittlere Proportionallinie sey, so werden die Puncte A, M, N, D ꝛc. die gesuchten Puncte zur Parabel seyn.

Beweis. Diese Verfertigung der Figur sagt uns, es sey $AP : PM = PM : AC$

Das ist $x : y = y : a$

Dahero $\overline{PM}^2 = AP \times AC$

Oder $y^2 = ax$ welches ja die Gleichung zur Parabel ist. Es sind dahero die Puncte A, M, N, D Puncte zur Parabel.

Anmerk. Man sieht von sich selbst, daß, je kleiner die Theile AP, PE ꝛc. desto genauer die Parabel seyn werde.

Eine andere Auflösung dieser Aufgabe.

1. Man ziehe eine unbestimmte Linie AL (157. *Fig.*) dessen Theil AC dem gegebenen Parameter gleich sey.

2. Aus dem Puncte C richte man die Perpendicularlinie CD von unbestimmter Länge auf.

3. Theile man die Linie AC in zween gleiche Theile in B.

4. Aus einem willkührlich in der Linie BC angenommenen Puncte d beschreibe man mit der Oeffnung Ad den halben Zirkel AmH.

Eben so beschreibt man aus den zwischen B und C willkührlich angenommenen Puncten e, g, C, ꝛc. die halben Zirkel AoI, ApE, ArL ꝛc.

5. Mit den Linien CH und Cm mache man ein rechtwinklichtes Parallelogramm, so bekömmt man den Punct t, welcher der erste Punct zur Parabel ist, die ihren Scheitelpunct in C haben wird.

Verfährt man auch mit den übrigen Linien Co und CI, Cp und CE, Cr und CL eben so, so erhält man auch die Puncte v, x, y, um durch diese die Parabel fort zu ziehen.

Be-

Beweis. Wir haben hier aus der Natur des Zirkels I. $\overline{Cm^2} = CH \times AC$

II. $\overline{Co^2} = CI \times AC$

III. $\overline{Cp^2} = CE \times AC$

IV. $\overline{Cr^2} = CL \times AC$ ꝛc. ꝛc.

Das ist, überall $y^2 = ax$, welches wieder die Gleichung zur Parabel ist. Es sind demnach t, v, x' y ꝛc. Puncte zur Parabel.

§. 278. Aufgabe. Für eine sammt ihrem Scheitelpuncte *A* gegebene Parabel *DAH* (158. *Fig.*) die Achse, den Parameter, die halbe Ordinate, und eine ganze Ordinate finden, die dem Parameter gleich ist.

Auflösung. 1. Aus A bemerke man mit dem Zirkel zween willkührlich, aber doch gleichweit vom A abstehende Puncte M und R, und zieh die Linie MR, durch ihr Mittel P aber die Linie APB, so wird AB die gesuchte Achse seyn, und MP, oder PR die halbe Ordinate, weil sie senkrecht einander schneiden, und MP = PR ist.

2. Man suche zu AP und PM die dritte Proportionalgröße, diese wird der gesuchte Parameter seyn.

3. Mache die Abscisse dem gefundenen Parameter gleich, und zieh die halbe Ordinate, so wird auch diese dem Parameter gleich seyn. (§. 261. n. IV,)

4. Mache $AP = \frac{a}{4}$ und zieh MR, so wird die ganze Ordinate MR dem Parameter a gleich seyn. (§. 261. n. VI.)

§. 279. Wir haben (§. 267.) erwiesen, daß jede Tangente mM (149. *Fig.*) die Achse der Parabel nothwendig in einem Puncte T durchschneide. Wenn wir dahero überdas aus dem Berührungspuncte n (159. *Fig.*) eine Ordinate nP auf die Achse ziehen, so erhalten wir ein rechtwinklichtes Dreyecke TnP, wovon eine Seite nP die halbe Ordinate, Tn die Tangente, und TP, die Subtangente genennt wird. Richten wir weiters auf den Punct n eine Perpendicularlinie nq auf, wird diese die Normal, Pq aber die Subnormal genennt.

§. 280. Wenn uns in einem rechtwinklichten Dreyecke zwo Seiten bekannt, können wir auch die dritte finden. Wenn man dahero eine Methode finden will, auf jeden gegebenen Punct n einer Parabel,

bel, oder andern krummen Linie, wovon uns das Verhältniß zwischen der Abscisse AP und Ordinate nP bekannt ist, eine Tangente zu ziehn, sieht man leicht, daß wir nur die Subtangente, und hiemit den Punct T bestimmen dörfen, welches geschieht, wenn wir das Verhältniß der Subtangente zur Abscisse finden. Nachfolgender Lehrsatz wird die Methode begreiflich machen.

§. 281. **Lehrsatz.** In jeder Parabel *DMA* (160. *Fig.*) ist die Subtangente *tP* der gedoppelten Abscisse gleich, das ist $tP = 2AP$.

Wir wollen z. B. eine Tangente auf den Punct M haben, so bilden wir uns ein, die durch M und D gezogene Secante TMD bewege sich um den Punct M gegen v, so werden wir in dieser Bewegung wahrnehmen, daß sich die Puncte M und D immer mehr und mehr einander nähern, und endlich beede in einen einzigen Punct M zusamm laufen, und aus der vorigen Secante TMD (weil sich nothwendig auch der Punct T bis in t bewegen muß) die Tangente tMv werden, wovon tP die Subtangente ist.

Wir wollen nun, um den Punct t zu finden, unsere Rechnung vornehmen.

Es sey $AP = x$
$PB = d$ so ist $AB = x + d$
$PT = s$
$\overline{PT}^2 = s^2$ so ist $BT = s + d$
und $\overline{BT}^2 = s^2 + 2ds + d^2$

Es ist aber $\overline{BD}^2 : \overline{PM}^2 = AB : AP$ (§. 262.)

Das ist $\overline{BD}^2 : \overline{PM}^2 = x + d : x$

Weil aber BTD und PTM ähnliche Dreyecke sind, so ist

$\overline{BD}^2 : \overline{PM}^2 = \overline{BT}^2 : \overline{PT}^2$. (§. 31. n. III.)

Das ist $\overline{BD}^2 : \overline{PM}^2 = s^2 + 2ds + d^2 : s^2$. Wenn so ist $x + d : x = s^2 + 2ds + d^2 : s^2$ (wir substituiren, folglich $xs^2 + ds^2 = xs^2 + 2dsx + d^2x$, das Product der äussern und mittlern Glieder.

Subtrahiren wir nun beyderseits xs^2,
so bleibt $ds^2 = 2dsx + d^2x$.

Das ist $s^2 = 2sx + dx$ wenn wir nämlich durch *d* dividiren. Dahero $2s + d : s = s : x$

Es ist aber im selben Augenblick, in welchem TMD zur Tangente geworden, die Differenz der Abscissen $PB = d$ völlig verschwunden, und folglich $d = 0$. Dahero haben wir, statt der vorigen Proportion, diese:

$2s + 0 : s = s : x$

Hiemit

Hiemit $2sx = s^2$. Dividiren wir durch s,
So ist $2x = s = Pt$. Es ist also in jeder Parabel die Subtangente der gedoppelten Absciße gleich, und wird es nimmer schwer seyn, auf jeden Punct der Parabel eine Tangente ziehen; man darf nämlich nur aus dem gegebenen Puncte M (161, *Fig.*) eine halbe Ordinate MP auf die Achse AR ziehen; die Achse verlängern, und endlich $At = AP$ machen, so wird tP die Subtangente, und tMD die gesuchte Tangente seyn.

§. 282. **Lehrsatz.** Wenn wir auf den Berührungspunct *M* (161. *Fig.*) die Normal *MR* aufrichten, wird sie so auf einen Punct *R* der Achse fallen, daß die Subnormal *PR* jederzeit der Hälfte des Parameters gleich sey.

Beweis. Es sey $\begin{matrix} MP = y \\ AP = x \end{matrix}$ der Parameter $= a$

Weil tMR ein rechter Winkel ist, so haben wir

$\div tP \cdot MP \cdot PR$

Das ist $2x \cdot y \cdot PR$

Dahero $PR = \dfrac{y^2}{2x}$

Es ist aber $y^2 = ax$

Folglich ist $PR = \frac{ax}{2x} = \frac{a}{2}$ w. z. E.

§. 283. **Lehrsatz.** In jeder Parabel ist das Dreyeck *TMP*, (162. *Fig.*) welches die Tangente, die halbe Ordinate, und die Subtangente miteinander ausmachen, dem rechtwinkelichten Parallelogramm *ARMP* gleich, welches entsteht, wenn wir in *M* eine mit der Achse parallel laufende Perpendicular *MR* auf die Ordinate *MP* aufrichten, und es mit der Parallel *AR* schliessen.

Beweis. Es ist leicht zu erweisen, daß das Dreyecke ABT = RBM sey

Denn R = A beede rechte Winkel.
o = p Verticalwinkel
Und RM = AP = AT (§. 281.)
So ist also ABT + ABMP = TMP
= RBM + ABMP = ARMP. w. z. E.

§. 284. **Lehrsatz.** Der Quadratinnhalt was immer für einer parabolischen Fläche *ABCM* (163. *Fig.*) ist jederzeit dem Producte gleich, welches entsteht, wenn man ihre größte Ordinate *AC* durch $\frac{2}{3}$ ihrer Achse BM multiplicirt.

Weil

Weil AC × BM dem ganzen Parallelogramm AdLC gleich ist, so müssen wir erweisen, daß die halbe Parabel ABMA = $\frac{1}{3}$ des Parallelogramms AdBM sey.

Vorbereitug und Beweis. Man theile die Linie Bd in so viel gleiche Theile, als man will, und ziehe durch die Theilungspuncte g, f ꝛc. die mit der Achse BM parallel laufende Linien gk, fi ꝛc.

So ist $\overline{Bg}^2 : \overline{Bf}^2 = gk : fi$. (§. 262.)

Es sind aber Bg, Bf ꝛc. Glieder einer arithmetischen Progreßion, dahero die Summe aus den Quadraten aller dieser Glieder = $\frac{1}{3}\,\omega^2 \times n$ (§. 165.)

Man kann aber diese Progreßion für eine unendliche Reihe ansehen: dahero $\omega^2 = \infty^2$, und $n = \infty$, folglich S^2, oder die Summe aus den Quadraten dieser Glieder = $\frac{1}{3}\,\infty^2 \times \infty = \frac{1}{3}\,\infty^3$.

Nun ist der Raum, oder die Fläche ABd ja allen unendlich kleinen Elementen, woraus sie bestehet, oder der Summe aller dieser unendlich kleinen Quadrate gleich, welches wir in unsrer allgebraischen Sprache so ausdrücken: ABd = $\frac{1}{3}\omega^2 \times n = \frac{1}{3}$Ad × Bd.

So muß also nothwendig die noch übrige Fläche, oder die halbe Parabel ABMA $\frac{2}{3}$ des ganzen Parallelogramms AdBM ausmachen.

Eben so wird erwiesen, daß die halbe Parabel MBCM = $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms MBLC, und folglich die Oberfläche, oder der Quadratinnhalt der ganzen Parabel ABCMA = $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms AdLC = AC × $\frac{2}{3}$ BM sey. w. z. E.

Anmerk. Was wir bishero von der Achse der Parabel erwiesen, läßt sich von jedem Diameter derselben insonderheit erweisen, und verhalten sich z. B. die Quadrate der *ordinatarum ad diametrum* untereinander, wie die correspondirenden Abscissen des nämlichen Diameters. Der Beweis davon würde für unser Vorhaben zu weitläufig seyn, indem wir noch manche Lehrsäße vorher zu erweisen hätten, die zum Bombenwerfen eben nicht so nöthig zu seyn scheinen, welches doch mein Hauptabsehen der bishero erwiesenen Lehrsätze von der Parabel war. Alle andere noch so schöne Aufgaben und Sätze, die hierzu nicht dienlich oder nöthig, können wir in diesem Werke missen, und ein Liebhaber mag sie bey denen nachholen, die, wie *La caille*, *Sigorne*, *La Chapelle*, *Stejnmayer*, *Lecchi*, und andere hierüber ausführliche und besondere Werke geschrieben. Ich eile vielmehr zur practischen Anwendung der geometrischen Lehrsätze und Aufgaben, die ich meinen Lesern bishero beygebracht, und schliesse den I. theoretischen Theil meines Unterrichts. Nur die Elipse und Hyperbel müssen meine

meine Leser noch kennen lernen; denn mehr, als sie kennen, würde ihnen für dießmal unnöthig seyn.

III. Abschnitt.

Von der Elipse und Hyperbel.

§. 285. Aus was für einem Kegelschnitte die Elipse eigentlich entstehe, haben wir schon (§. 244.) gesehen. Um diese Linie aber kennen zu lernen braucht es mehr nicht, als sie beschreiben.

§. 286. Aufgabe. Eine Elipse beschreiben.

Auflösung. Man bediene sich hierzu eines Fadens von beliebiger Länge, (164. *Fig.*) nachdem man die Elipse groß oder klein machen will, und mache ihn auf einer ebenen Fläche an beyden Enden in zween Puncten F und f, deren Abstand voneinander kleiner als die Länge des Fadens ist, feste. Denn spanne man mit einer Nadel oder Reißbley diesen luckern Faden an, daß er, wie bey M einen Winkel mache, und fahre damit um die Puncte F, f herum, so ist die Elipse fertig.

In dieser Figur wird Aa die größere, Bb die kleinere Achse genennt. F heisset der obere, f der untere Brennpunct; C der Mittelpunct, MP die halbe Ordinate, AP, und aP die correspondirenden Abscissen.

§. 287. Aus der Verfertigung dieser Figur ziehen wir folgende Lehrsätze heraus, die keines Beweises mehr nöthig haben.

I. Wenn wir aus den zween Brennpuncten F und f gerade Linien auf was immer für einen Punct M der Elipse ziehen, wird jederzeit die Summe dieser zwo Linien der größern Achse gleich seyn. Nämlich $FM + fM = Aa$.

II. Wenn wir aus F, oder f auf den äussersten Punct B oder b der kleinern Achse eine gerade Linie FB oder fB ziehen, wird jede deren der Hälfte der größern Achse gleich seyn.

Das ist $FB = AC = fb$ ꝛc.

III. Wenn uns also die zwo Achsen Aa und Bb (165. *Fig.*) von einer Elipse bekannt, dörfen wir, um die Brennpuncte F und f zu finden, nur sie beede durch ihre Hälften senkrecht einander schneiden lassen. Nimmt man mit dem Zirkel alsdann die

Hälfte

Hälfte der größern Achse = AC und übersetzt sie aus dem Puncte B in eben diese Linie AC, und wieder aus B in aC, so werden die Puncte F und f die gesuchten Brennpuncte der Elipse seyn.

§. 288. **Aufgabe. Den Innhalt einer Elipse finden.**

Auflösung. Man verändere die gegebene Elipse in einen Zirkel gleichen Innhalts (§. 118.) und suche den Innhalt eben dieses Zirkels, (§. 75.) so ists geschehen.

§. 289, Den Kegelschnitt, woraus die hyperbolische Linie entsteht, haben wir §. 245. beschrieben.

Es ist aber die Hyperbole eine krumme Linie, in der sich die Quadrate der Semiordinaten EH, FI ꝛc. (166. *Fig.*) gegeneinander verhalten, wie die rechtwinkelichte Parallelogramme, welche entstehen, wenn wir die correspondirende Abscisse BE z. B. durch die Summe aus der Achse AB und der nämlichen Abscisse BE multipliciren.

Um sie, so viel es hier nöthig, kennen zu lernen, wird wieder eine einzige Aufgabe hinlänglich seyn.

§. 290.

§. 290. Aufgabe. Eine Hyperbel beschreiben.

Auflösung. Man ziehe auf einer ebenen Fläche zwo ungleiche Linien AB, CD so, daß sie sich in ihrem Mittel O senkrecht einander schneiden.

2. Auf den äussersten Punct B richte man die Perpendicularlinie BR auf, und verlängere die Linie AB beyderseits gegen G und V.

3. BG theile man in so viel gleiche Theile als man will BE, EF, FG 2c.

4. Aus dem Mittelpunct O beschreibe man so viel concentrische Zirkel mit der Oefnung OE, OF, OG 2c. als man Theile in BG angenommen.

5. Endlich suche man zu den 3 Linien AB, CD, BP die vierte Proportionallinie EH, die man aus E senkrecht aufrichtet. Eben so sucht man die vierte Proportional zu AB, CD, BQ = FI, und zu AB, CD, BR = GL 2c. so werden B, H, I, L, Puncte zur Hyperbel, und die durch diese Puncte gezogene Linie eine hyperbolische Linie seyn.

Anmerk. Man sieht von sich selbst, daß man auch oberhalb bey A eine andere krumme Linie ZAN beschreiben könne, die der untern XBL völlig gleich ist.

Daß

Daß aber diese so beschriebene Linie oder Fläche eine Hyperbel sey, steht noch hier zum Ueberfluß der

Beweis. $\overline{BP^2} = BE \times BS$

Es ist aber $AS = EB$

Dahero $BS = AE$

Folglich $EB \times BS = EB \times AE$

Dahero I. $\overline{BP^2} = EB \times AE$

Ueberdas ist $\overline{BQ^2} = BF \times TB$

Weil aber $AT = BF$

So ist II. $\overline{BQ^2} = BF \times AF$

Es ist aber $EH : BP = CD : AB$ (n. 5.)

$FI : BQ = CD : AB$

Dahero $EH : BP = FI : BQ$

Und $EH : FI = BP : BQ$

Folglich auch $\overline{EH^2} : \overline{FI^2} = \overline{BP^2} : \overline{BQ^2}$.

Wir hatten aber kurz zuvor $\overline{BP^2} = EB \times AE$ (n. I.

Und $\overline{BQ^2} = BF \times AF$ (n. II.

So ist endlich $\overline{EH^2} : \overline{FI^2} = EB \times AE : BF \times AF$.

Das ist: Die Quadrate der Semiordinaten verhalten sich wie ꝛc. Es ist demnach XBHIL eine Hyperbel.

§. 291. Wenn man in einer Hyperbel (166. *Fig.*) die zweyte Achse CD so in den Punct A übersetzet, daß sie von der Achse AB senkrecht, und in zwenn gleiche Theile Am und An geschnitten werde, und man aus O die Linien Om, und On (die man nach Belieben verlängern kann) zieht, werden diese Assymptoten der Hyperbel genennt, weil, ob sie sich schon der gleichfalls auf beyden Seiten verlängerten Hyperbel immer mehr und mehr nähern, sie dieselbe doch niemal erreichen, oder berühren werden.

Anmerk. Von Anwendung der Theorie über die Parabel, Elipse und Hyperbel zur Dioptrick, zur Catoptrick, zur Acustick 2c. kann von Liebhabern das schöne Werkgen Traité des sections coniques des Hrn. de La Chapelle nachgelesen werden, der uns über den Gebrauche dieser krummen Linien in verschiedenen Wissenschaften die nützlichsten Anmerkungen geliefert.

Ver=

Verzeichniß
der
Materien,
worüber in diesem theoretischen Theile gehandelt wird.

Von der Allgebra.

Blatt.

1. Abschnitt. Vorläufige Erklärungen. - 21
2. Abschnitt. Von den ersten Operationen der Allgebra. - - - - - - 25
3. Abschnitt. Von den Dignitäten überhaupt. 33
4. Abschnitt. Von den ersten Operationen in den allgebraischen Dignitäten. - - - 36
5. Abschnitt. Von der Regel der Allgebra. 39
6. Abschnitt. Von den Regeln der Reduction. 44
7. Abschnitt. Von ausziehung der Wurzeln aus den Aequationen des zweyten Grades. - 50

Blatt.
8. Abschnitt. Uebungen in etwelchen leichtern Aufgaben vom ersten Grade, in denen nur eine einzige unbekannte Größe vorkömmt. - 53
Aufgaben, in welchen mehr unbekannte Größen vorkommen. - - - - 57
Aufgaben vom zweyten Grade. - 61
9. Abschnitt. Von den arithmetisch, und geometrischen Verhältnißen rc. vorläufige Erinnerungen. 64
10. Abschnitt. Lehrsätze und Aufgaben von den arithmetischen Proportionen rc. - - - 68
11. Abschnitt. Von den allgebraischen Formeln der arithmetischen Progreßionen. - - 82
12. Abschnitt. Von den geometrischen Proportionen und Progreßionen vorläufige Erklärungen. 87
13. Abschnitt. Lehrsätze und Aufgaben von den geometrischen Verhältnissen, Proportionen und Progreßionen. - - - - - - 89
14. Abschnitt. Von den zusammengesetzten Verhältnissen. - - - - - - 104
15. Abschnitt. Von den allgebraischen Formeln der geometrischen Progreßionen. - - 108
16. Abschnitt. Anhang von den Anfangsgründen der Radicalrechnung. - - - 113

Von den Gründen der Geometrie.

I. Abschnitt.

Von den Linien.

1. Abhandl. Von den Eigenschaften und Bewegungen der Linien. - - - - 125

2. Ab-

Blatt.
2. Abhandl. Von den Parallellinien. - 134
3. Abhandl. Von den Eigenschaften der Dreyecken. 138
4. Abhandl. Von der Vergleichung, und Aehnlichkeit der Dreyecken. - - - - 146
5. Abhandl. Von den Eigenschaften des Zirkels. 159
6. Abhandl. Von verschiedenen Gattungen der Polygonen. - - - - - - 175

II. Abschnitt.

Von den ebenen Flächen.

1. Abhanndl. Von den Eigenschaften der Flächen, die sie in Ansehung der Linien haben. - 181
2. Abhandl. Von den Eigenschaften der Flächen, die sie in Ansehung anderer Flächen haben. 184
3. Abhandl. Von Ausmessung und Vergleichung der Flächen. - - - - - - 186
4. Abhandl. Vom Innhalte des Zirkels. 194
5. Abhandl. Anmerkung über die Quadratur des Zirkels. - - - - - - - 199
6. Abhandl. Von der Rechnung und Wandelung der Figuren. - - - - - - 204

III. Abschnitt.

Von den dichten Körpern.

1. Abhandl. Vorläufige Erklärungen davon. 221
2. Abhandl. Von den dichten Vielecken. 232

Blatt.
3. Abhandl. Von Ausmessung der dichten Körper. 236
4. Abhandl. Von Ausmessung der Sphäre in Sonderheit. - - - - - . 248
5. Abhandl. Von Vergleichung der dichten Körper. 256

Von der Trigonometrie.

1. Abhandl. Von den Logarithmen und Decimalbrüchen. - - - - - 263
2. Abhandl. Von den allgemeinen zur Trigonometrie nöthigen Begriffen. - - - 284
3. Abhandl. Gründe der trigonometrischen Ausrechnung der Dreyecke. - - - - 290
4. Abhandl. Aufgaben über die trigonometrische Berechnung des rechtwinkelichten Dreyeckes. 296
5. Abhandl. Aufgaben über die Berechnung des schiefwinkelichten Dreyeckes. - - 298

Anhang.

Kurze Abhandlung von den Kegelschnitten.

1. Abschnitt. Vorläufige Erklärungen. - 301
2. Abschnitt. Von der Parabel. - - 306
3. Abschnitt. Von der Elipse und Hyperbel. 333

Ver-

Verzeichniß
der practischen Aufgaben, die aus der Geometrie in diesem theoretischen Theile vorkommen.

Von den Linien.

Blatt.

In jedem gegebenen Puncte einer geraden Linie eine Perpendicularlinie aufrichten. - - 131

Von einen ausserhalb der Linie gegebenen Puncte auf die gegebene Linie eine Perpendicularlinie herab ziehen. - - - - - - 132

Eine gegebene Linie in zween gleiche Theile abtheilen. - 133

An einem gegebenen Puncte einer Linie einen Winkel beschreiben, der einem andern gegebenen Winkel gleich ist. - - - - - - 133

Von den Parallellinien.

Aus jedem gegebenen Puncte eine einer andern Linie parallellaufende Linie ziehen. - - - 137

Von den Dreyecken.

In jedem rechtwinkelichten Dreyecke aus zween gegebenen Seiten die dritte finden. - - 155

Jede gegebene Linie in so viel gleiche Theile theilen, als man will. - - - - - 156

Blatt.

Zu drey gegebenen Linien die vierte Proportionallinie finden. - - - - - - 157

Zu zwoen gegebenen die dritte Proportionallinie finden. - - - - - - - 158

Zwischen zwoen gegebenen die mittlere Proportionallinie finden. - - - - - 158

Von der Zirkelperipherie.

Einen gegebenen Bogen oder Winkel in zween gleiche Theile theilen. - - - - - 172

Den Mittelpunct eines gegebenen Bogens oder Zirkels finden. - - - - - 172

Auf eine gegebene Linie einen Zirkelbogen, oder Segmente beschreiben, welches einen gegebenen Winkel zu fassen fähig ist. - - - - 173

Auf einen gegebenen Punct einer Zirkelperipherie eine Tangente ziehen. - - - - 173

Aus einem ausserhalb des Zirkels bestimmten Puncte auf den gegebenen Zirkel eine Tangente ziehen. 174

Von den Polygonen oder Vielecken.

Den Polygonswinkel eines regularen Vieleckes finden. 175

Die Summe aller Polygonswinkeln eines regularen, oder irregularen Vieleckes finden. - - 177

Ein regulares Polygon innerhalb eines gegebenen Zirkels beschreiben. - - - - - 179

Ueber eine gegebene Linie ein regulares Polygon beschreiben. - - - - - - 179

Von

Von den ebenen Flächen.

Blatt.
Denn Innhalt eines Parallelogramms bestimmen. 189
Den Innhalt eines Dreyeckes bestimmen. - 191

Von der Zirkelfläche.

Den Innhalt eines Zirkels bestimmen. - 196
Den Innhalt eines Sectors bestimmen. - 196
Den Innhalt eines gegebenen Zirkelsegments bestimmen. - - - - - - 197
Aus dem gegebenen Diameter die Peripherie eines Zirkels finden. - - - - - 202
Aus der Peripherie den Diameter finden. - 202
Den Quadratinnhalt eines Zirkels finden, dessen Durchmesser und Peripherie bekannt ist. - - 203

Von der Rechnung und Wandelung der Figuren.

Zwey oder mehr Quadrate von gleicher oder ungleicher Größe addiren. - - - - 204
Zween oder mehr gleiche, oder ungleiche Zirkel addiren. - - - - - - - - 205
Zween Quadrate oder Zirkel voneinander subtrahiren. 205 u. 206
Ein gegebenes Quadrat oder Zirkel in arithmetischer und in geometrischer Progreßion multipliciren. 206 u. 207
Ein gegebenes Dreyeck in mehr gleiche Theile abtheilen. 208

Blatt.
Was immer für ein Parallelogramm aus einem gegebenen Puncte in zween gleiche Theile abtheilen. 209
Ein Parallelogramm in so viel gleiche Theile abtheilen, als man begehrt. - - - 210
Ein Scalenum in ein gleichschenklichtes Dreyeck des nämlichen Innhalts verwandeln. - - 210
Ein gleichschenklichtes Dreyeck in ein Parallelogramm gleichen Innhalts verwandeln. - - 211
Ein irregulares Viereck in ein Dreyeck des nämlichen Innhalts verwandeln. - - - - 211
Ein regulares Sechseck in ein Parallelogramm gleichen Innhalts verwandeln. - - - 212
Ein gegebenes Dreyeck in ein Parallelogramm gleichen Innhalts verwandeln. - - - 213
Ein gegebenes Parallelogramm in ein Quadrat des nämlichen Innhalts verwandeln. - - 214
Eine Rhombois in ein rechtwinkelichtes Parallelogramm rc. verwandeln. - - - 215
Was immer für ein Polygon in ein Quadrat gleichen Innhalts verwandeln. - - - - 215
Einen Zirkel in ein Dreyeck gleichen Innhalts verwandeln. - - - - - - 215
Eine Elipse oder Oval in einen Zirkel gleichen Innhalts verwandeln. - - - - 216
Was immer für ein gegebenes Polygon in so viel gleiche Theile abtheilen, als man begehrt. 217

Von

Von den dichten Körpern.

Blatt.

Einen dichten Winkel messen. - - - 233

Die Oberfläche und den dichten Innhalt eines Cubus oder Würfels finden. - - - 237

Die Oberfläche und den dichten Innhalt eines Prisma finden. - - - - - 240

Die Oberfläche einer ganzen Pyramide finden. 241

Die Oberfläche einer gestümmelten Pyramide finden. 243

Den dichten Innhalt einer Pyramide, oder eines Kegels finden. - - - - - 246

Die Oberfläche einer Sphäre finden. - 251

Den dichten Innhalt einer Sphäre finden. - 253

Den dichten Innhalt eines irregulären Körpers bestimmen. - - - - - - 255

Von den Logarithmen und Decimalbrüchen.

Jeden gegebenen Bruch in einen Decimalbruch des nämlichen Werths verändern. - - 271

Decimalgrößen addiren, oder subtrahiren. - 273

Decimalgrößen multipliciren oder dividiren. 274

Den Logarith. für eine Zahl bestimmen, welche größer ist, als die größte in den Tafeln. - 278

Die Zahl für einen Logarith. bestimmen, der sich in den Logarithmustafeln nicht genau finden läßt. 280

Die Zahl für einen Logarith. bestimmen, der größer als der größte in den Tafeln. - - 282

Die

Blatt.
Die Zahl für einen Negativlogarithmus bestimmen. - - - - 283
Rechtwinkelichte Dreyecke trigonometrisch ausrechnen. - - - - 296
Schiefwinkelichte Dreyecke trigonometrisch ausrechnen. - - - - 298

Von den Kegelschnitten.

Eine Parabel beschreiben. - - - 307
Aus einer gegebenen Parabel und ihrer Achse ihren Parameter finden. - - - - 316
Die Größe einer geraden Linie bestimmen, die man aus dem Brennpuncte einer Parabel auf den äussersten Punct ihrer Ordinate ziehet. - - 319
Die Größe einer Senne bestimmen, die man vom Scheitelpuncte der Parabel auf den äussersten Punct einer Ordinate zieht. - - - - 320
Die Größe eines rechtwinkelichten Parallelogramms bestimmen, welches entstehet, wenn wir die Summe zwoer halber Ordinaten durch ihre Differenz multipliciren. - - - - - 321
Die Größe eines rechtwinkelichten Parallelogramms aus einer halben Ordinate in ihre correspondirende Abscisse bestimmen. - - - - 321
Die Größe eines rechtwinkelichten Parallelogramms aus einer Abscisse in die andere finden. - 322
Die Parabel für was immer für einen gegebenen Parameter bestimmen, und beschreiben. - 323
Für eine, sammt ihren Scheitelpuncte gegebene Parabel die Achse, den Parameter, die halbe Ordi-
nate

Blatt.

vate und eine ganze Ordinate finden, die dem Parameter gleich ist. - - - - - 325

Den Quadratinnhalt einer parabolischen Fläche finden. 330

Eine Elipse beschreiben. - - - - - 333

Die Brennpuncte einer gegebenen Elipse finden. 334

Den Innhalt einer Elipse finden. - - 335

Eine Hyperbel beschreiben. - - - 336

Ende des theoretischen Theiles.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Tab 1

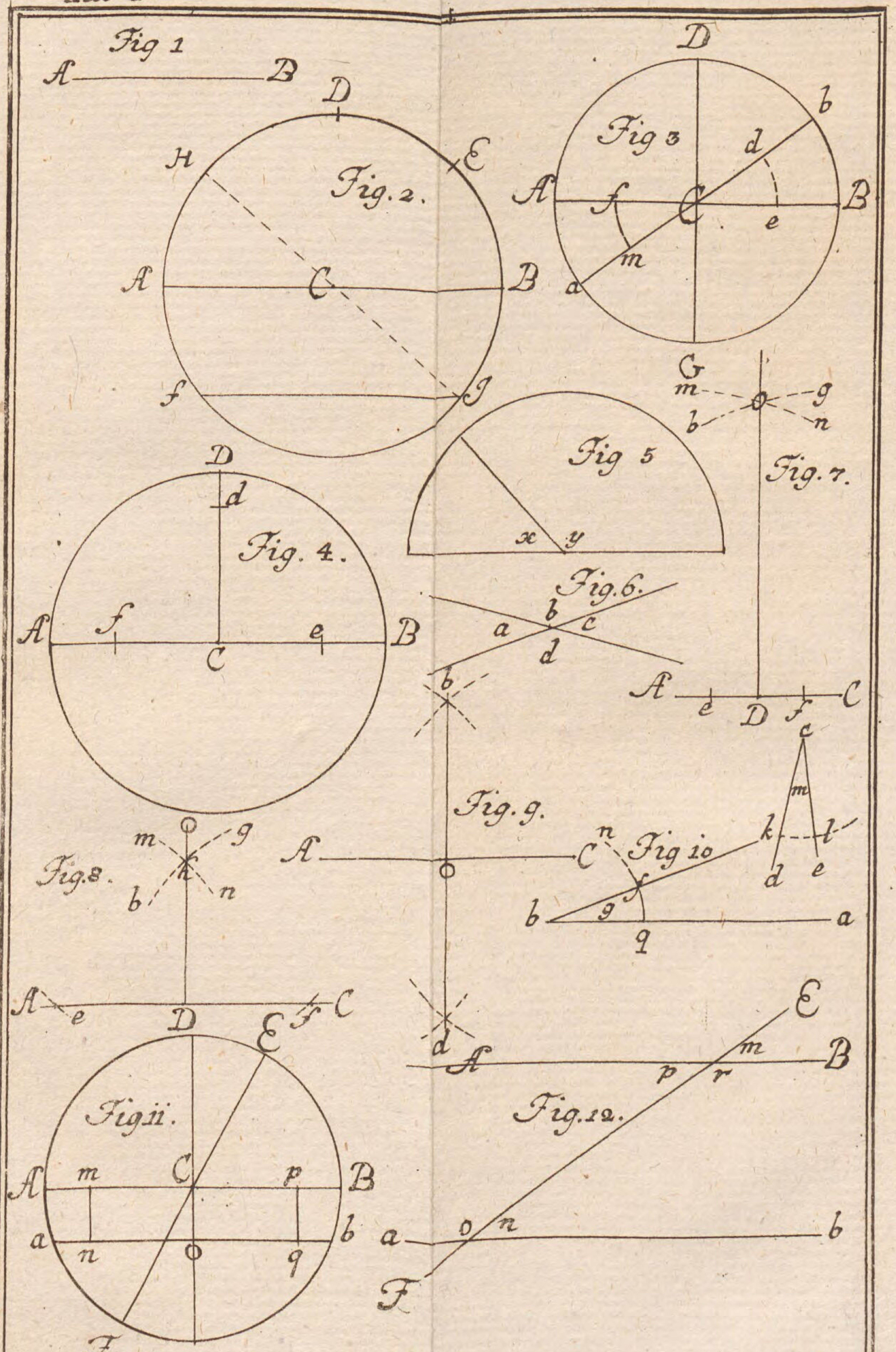


Fig 1
Fig. 2.
Fig 3
Fig. 4.
Fig 5
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig 10
Fig. 11.
Fig. 12.

Tab. 2.

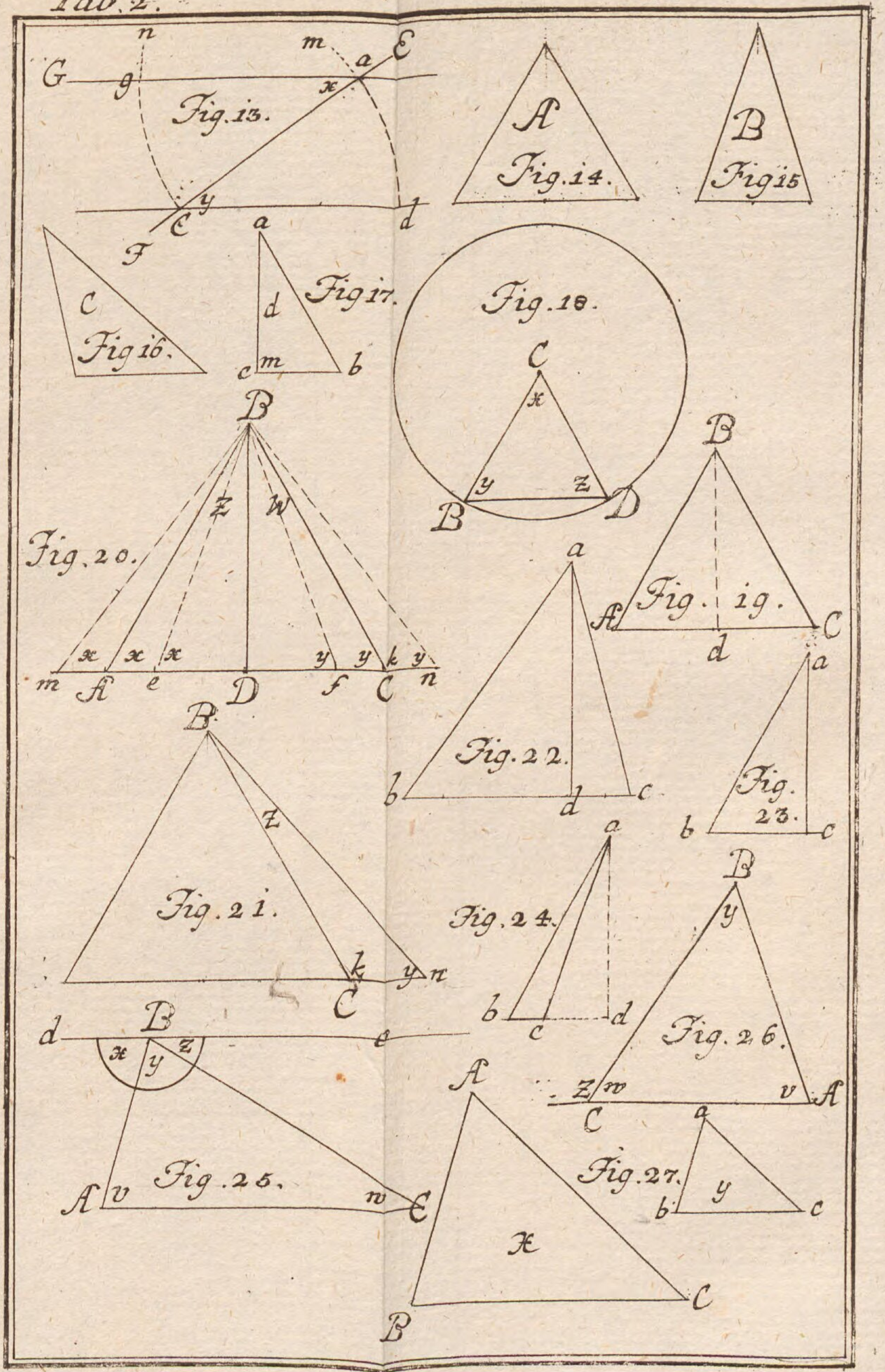


Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.

Tab. 3.

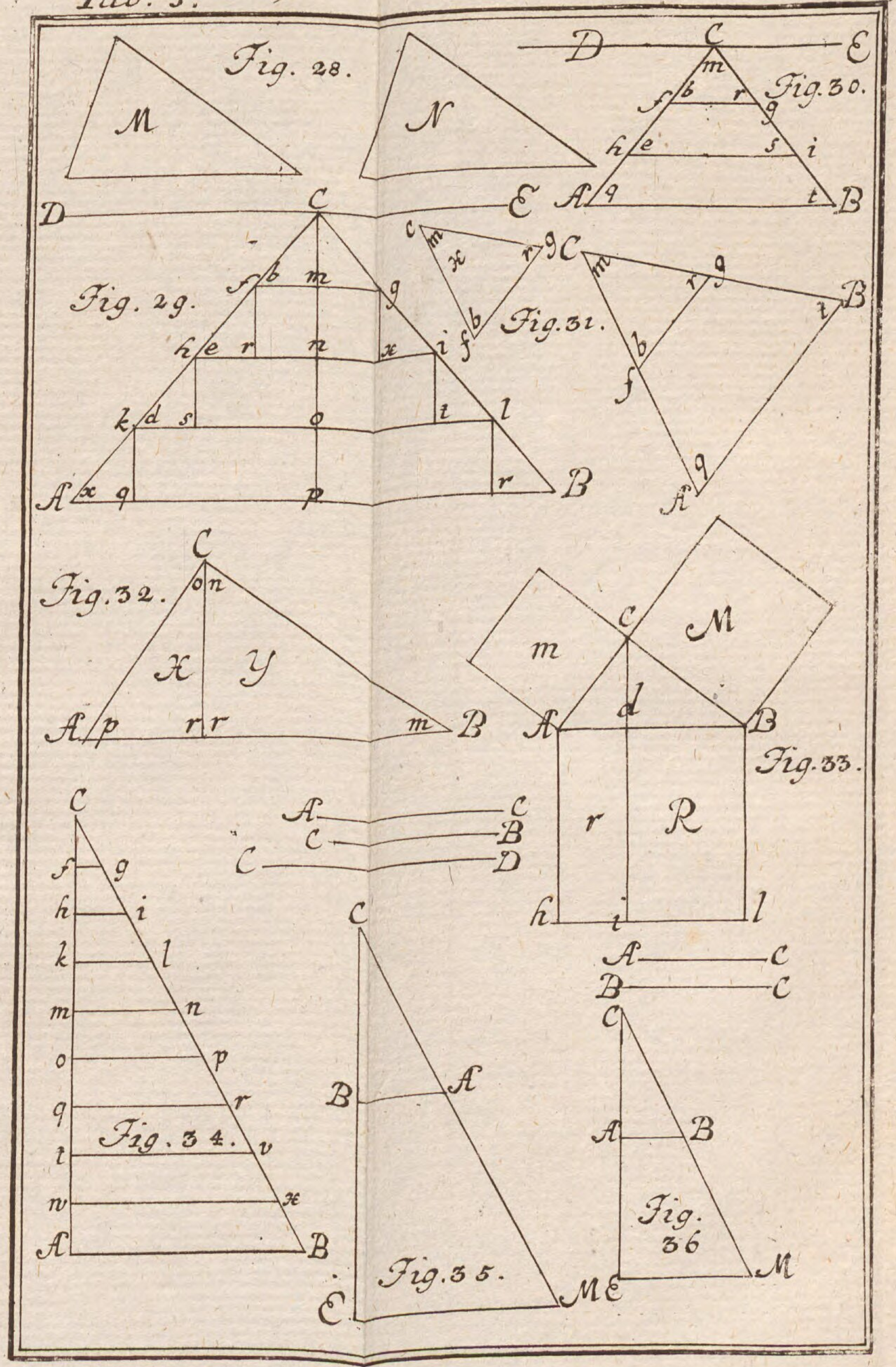
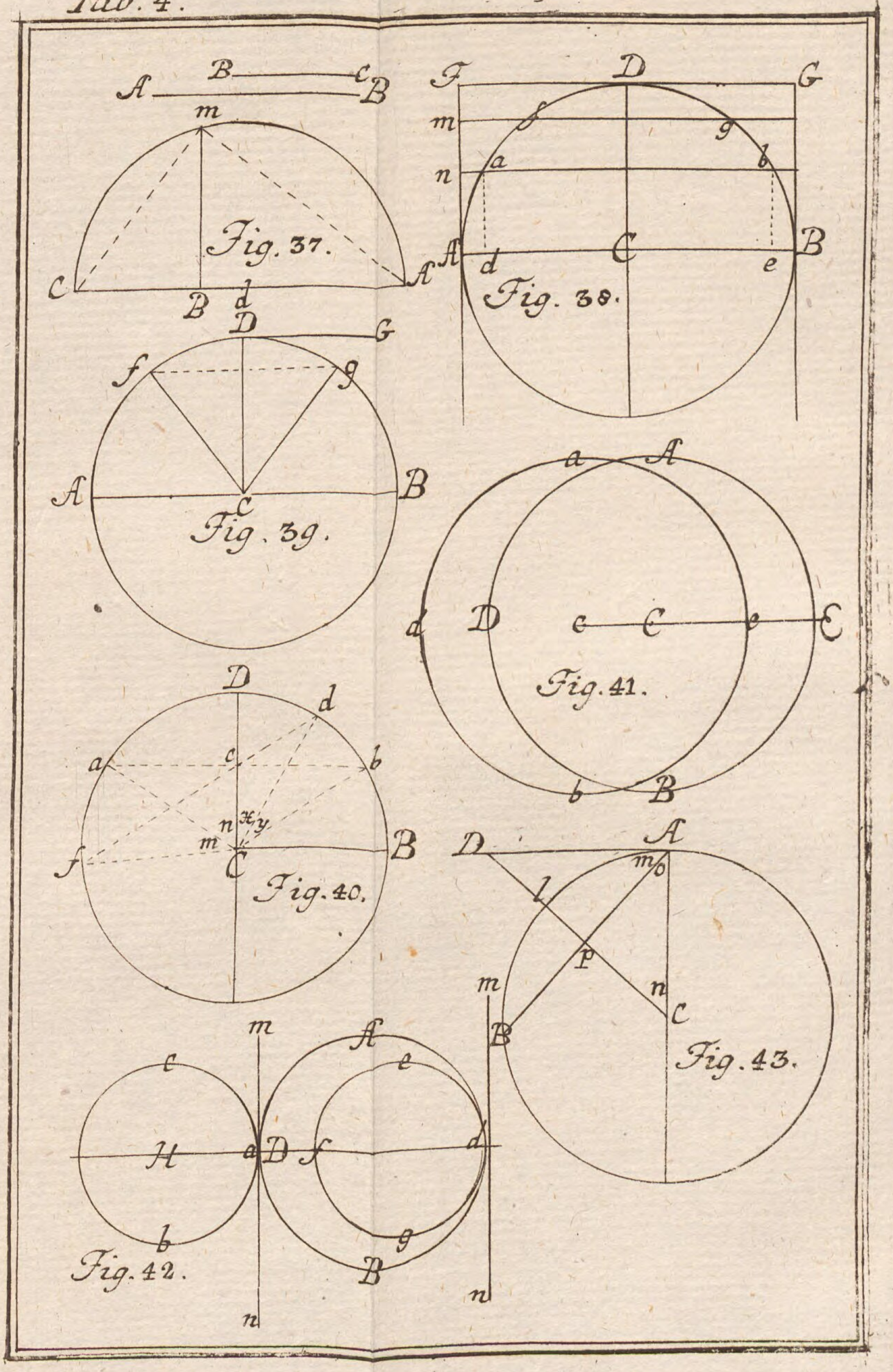


Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30. Fig. 31. Fig. 32. Fig. 33. Fig. 34. Fig. 35. Fig. 36.

Tab. 4.



A B c B
m
Fig. 37.
C B d A
F D G
m f g
n a b
A d C e B
Fig. 38.
D G
f g
A C B
Fig. 39.
a A
d D c C e C
Fig. 41.
b B
D
d
a c b
n x y
m
f C B
Fig. 40.
D A
m o
l
P
m n
B C
Fig. 43.
m A
c e
H a D f d
b g
Fig. 42.
B
n n

Tab. 5.

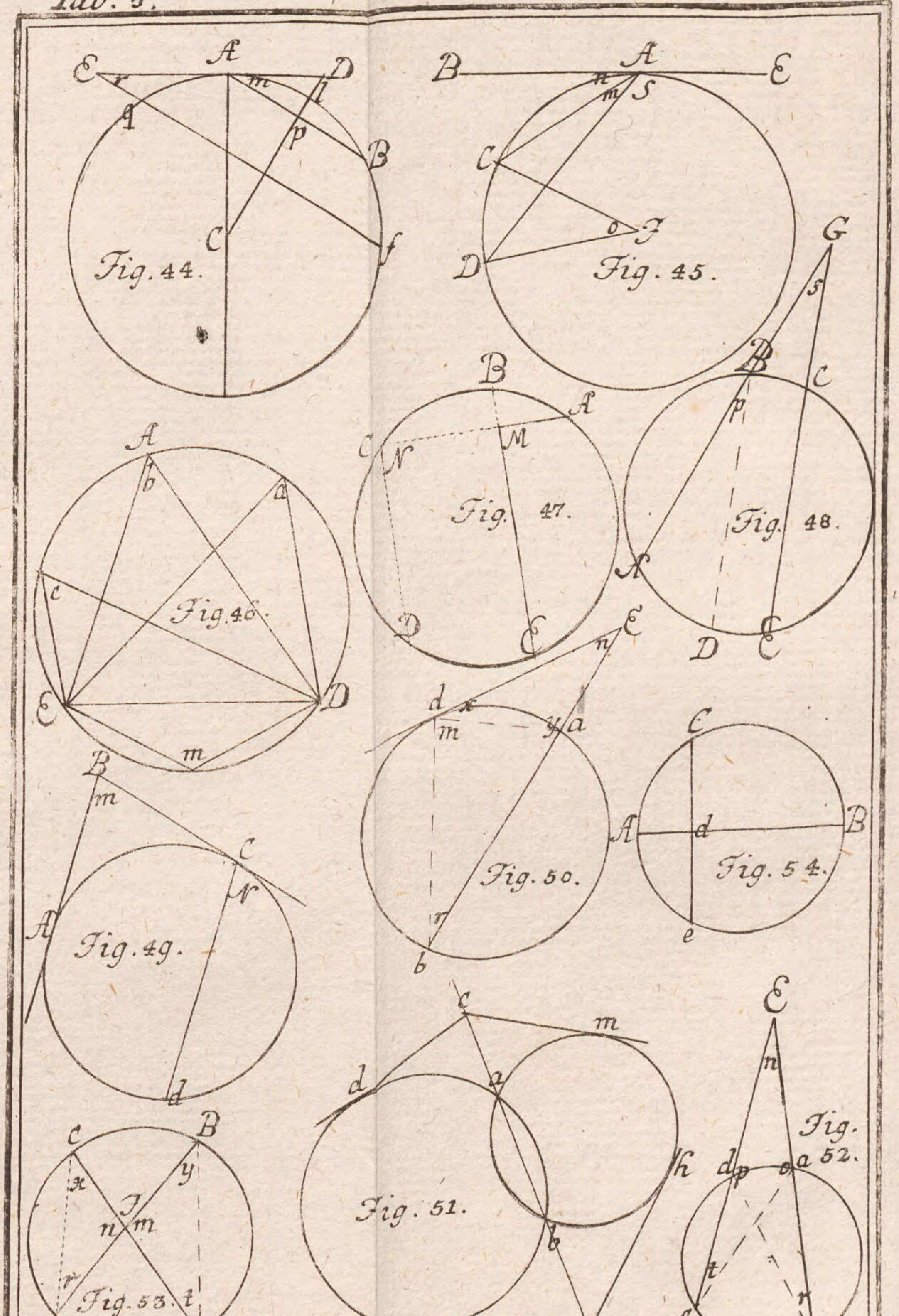


Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.

Tab. 6.

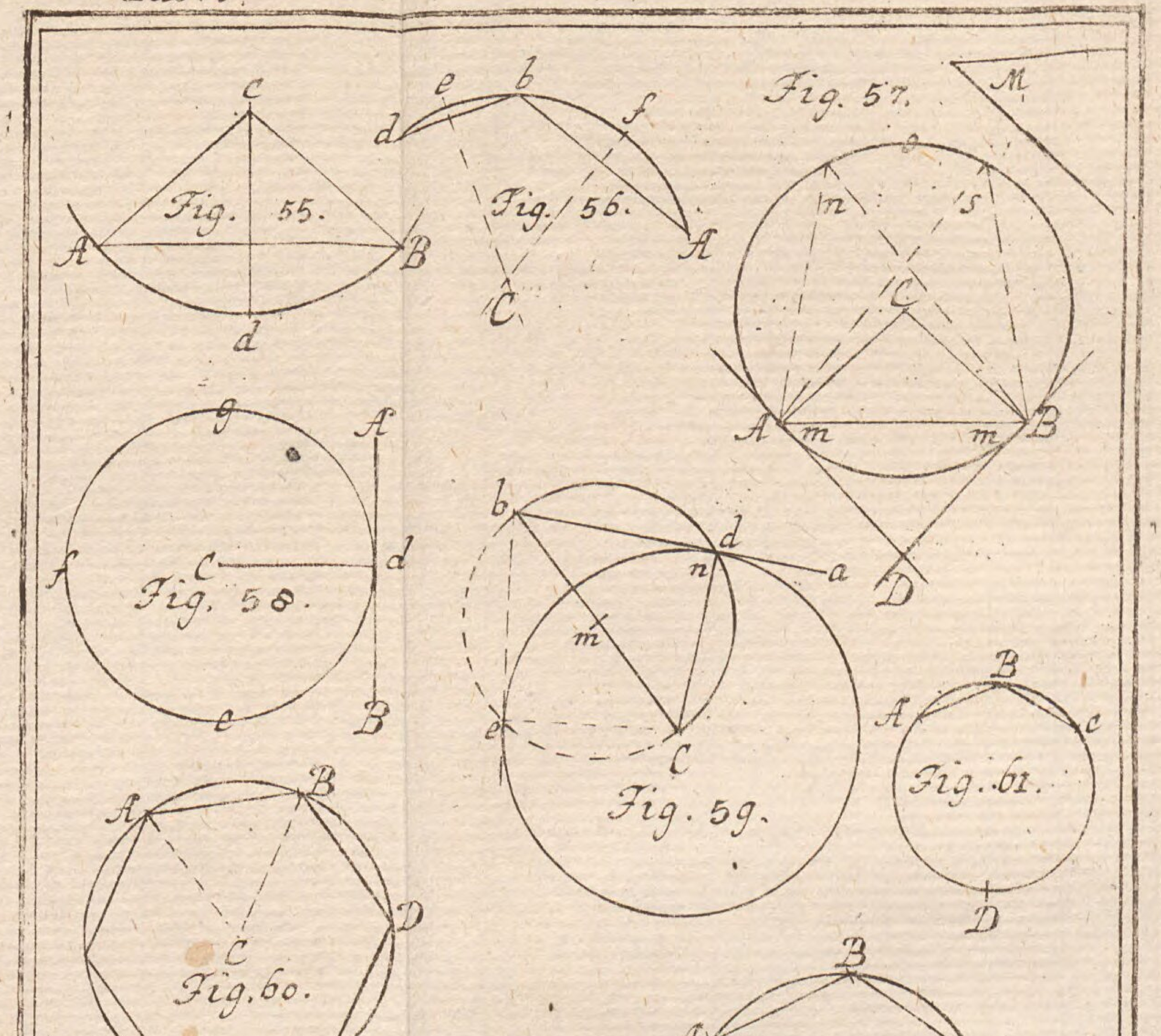


Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.

Tab. 7.

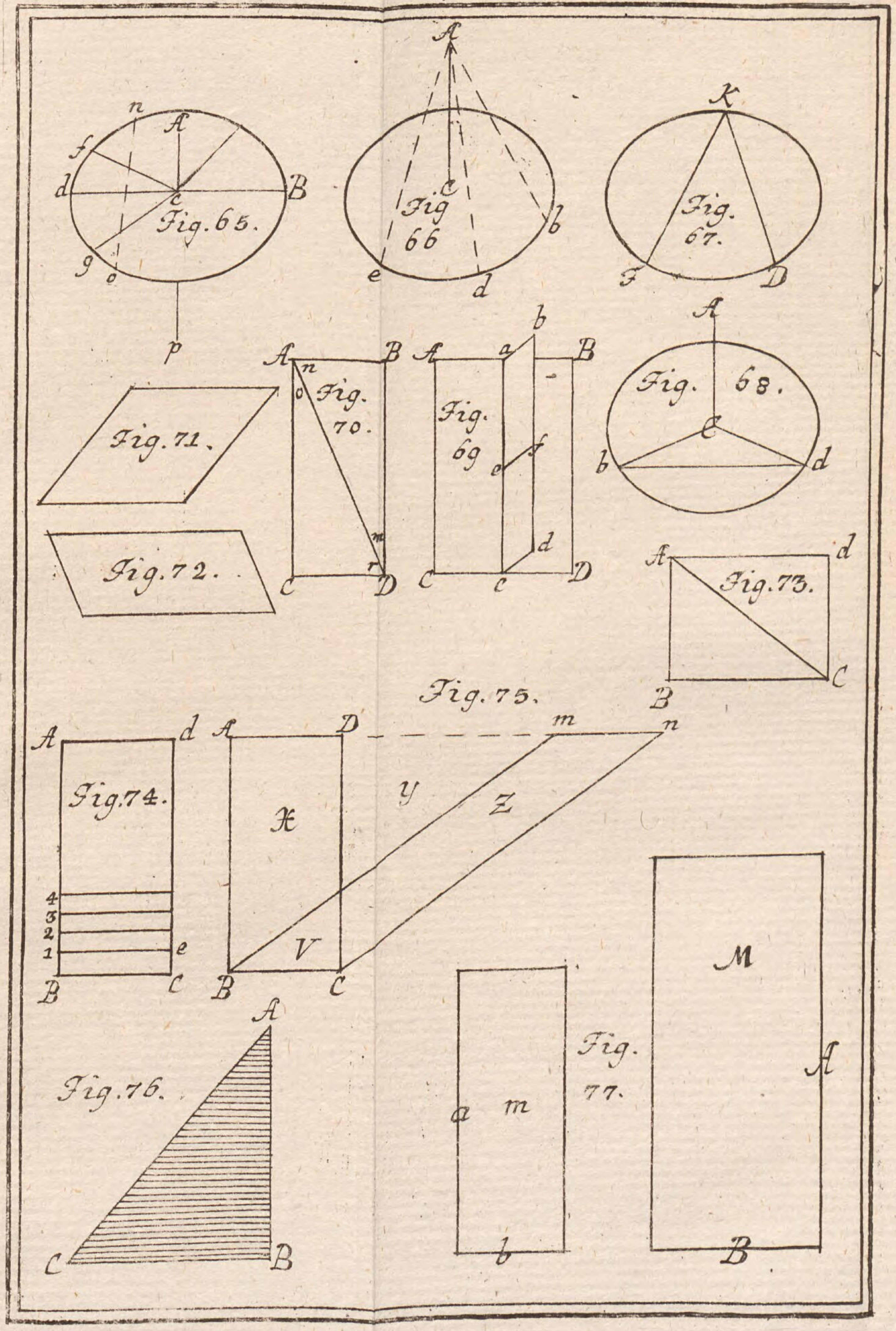


Fig. 65.
Fig 66
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 69
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.

Tab. 8.

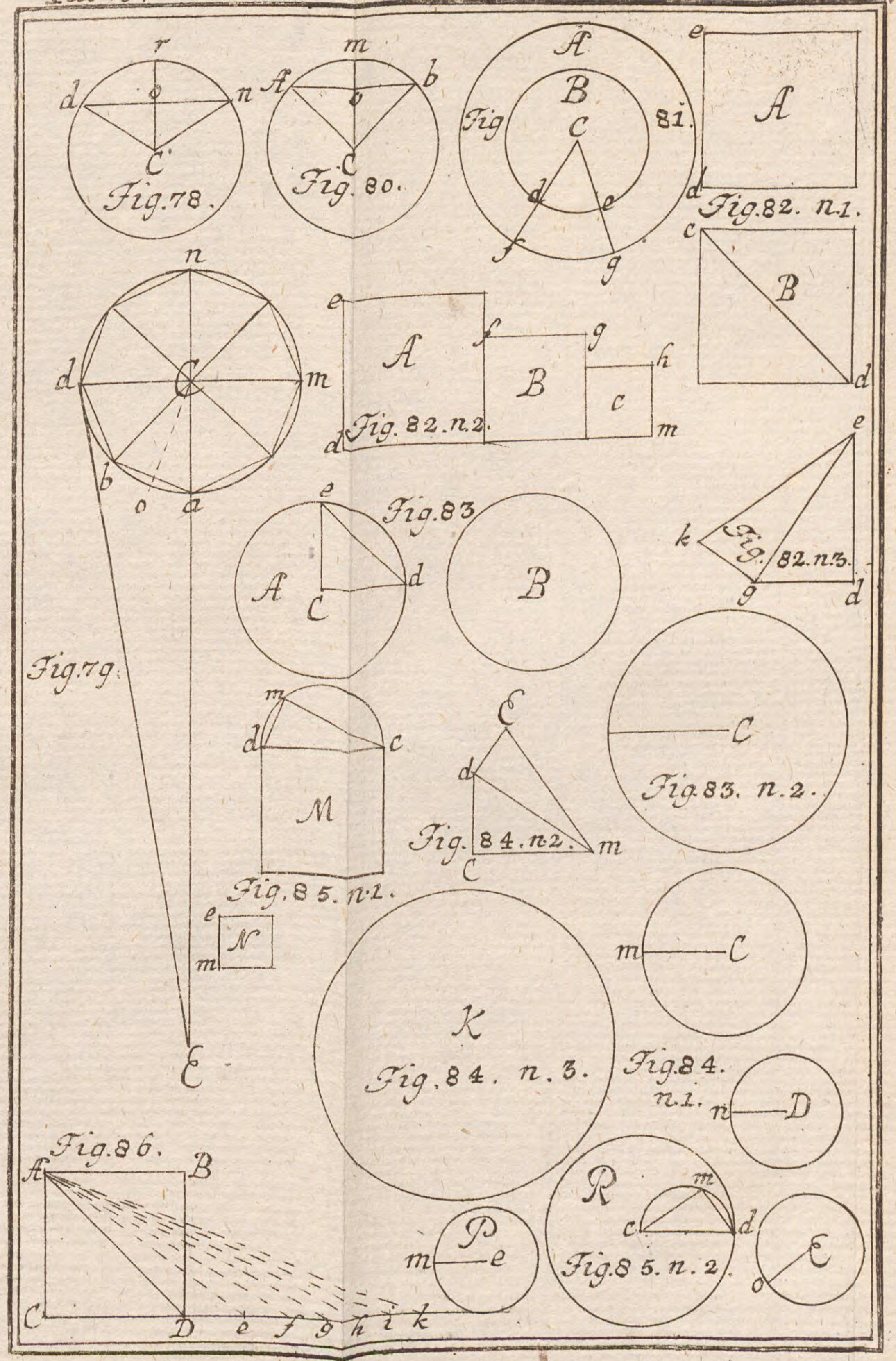
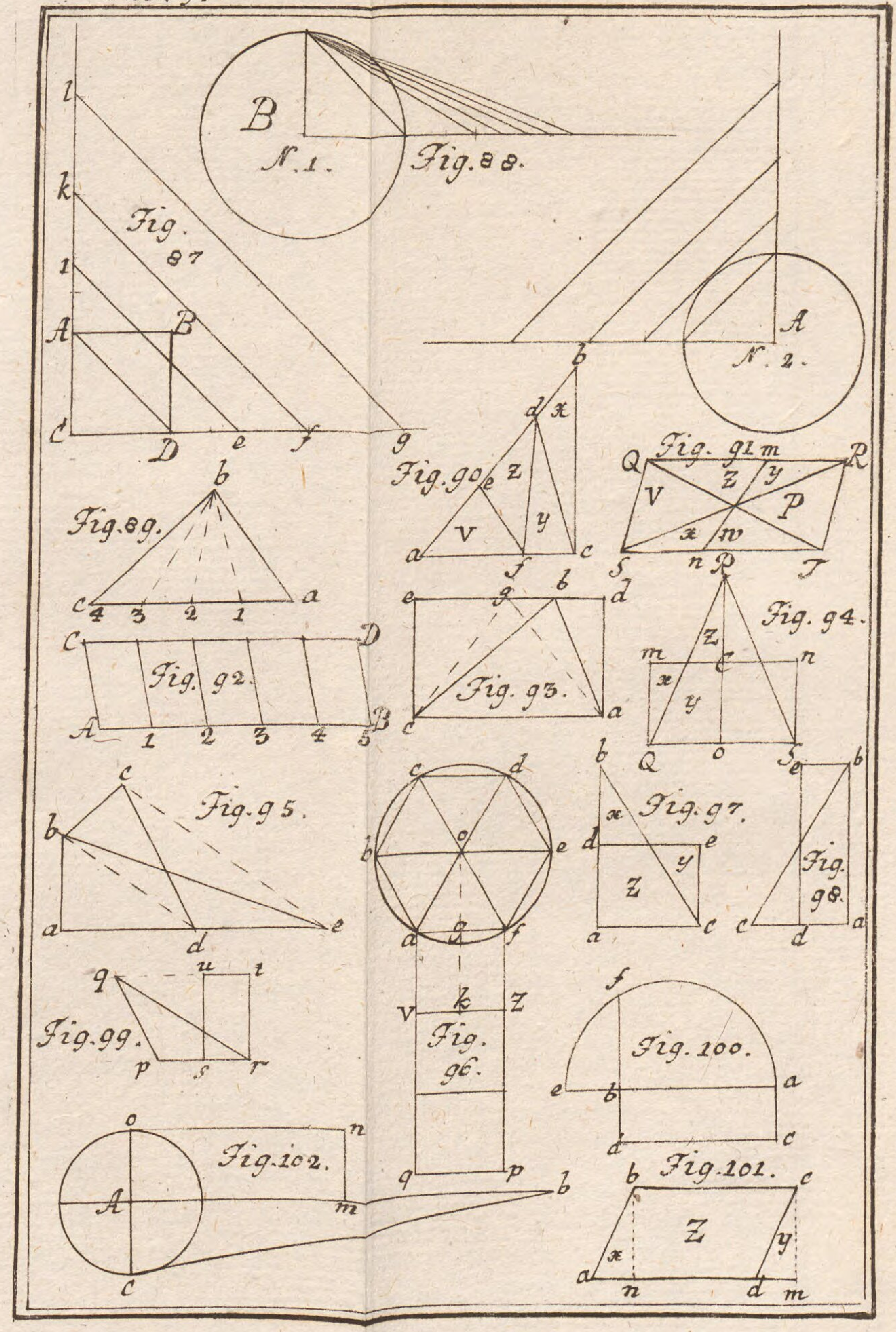
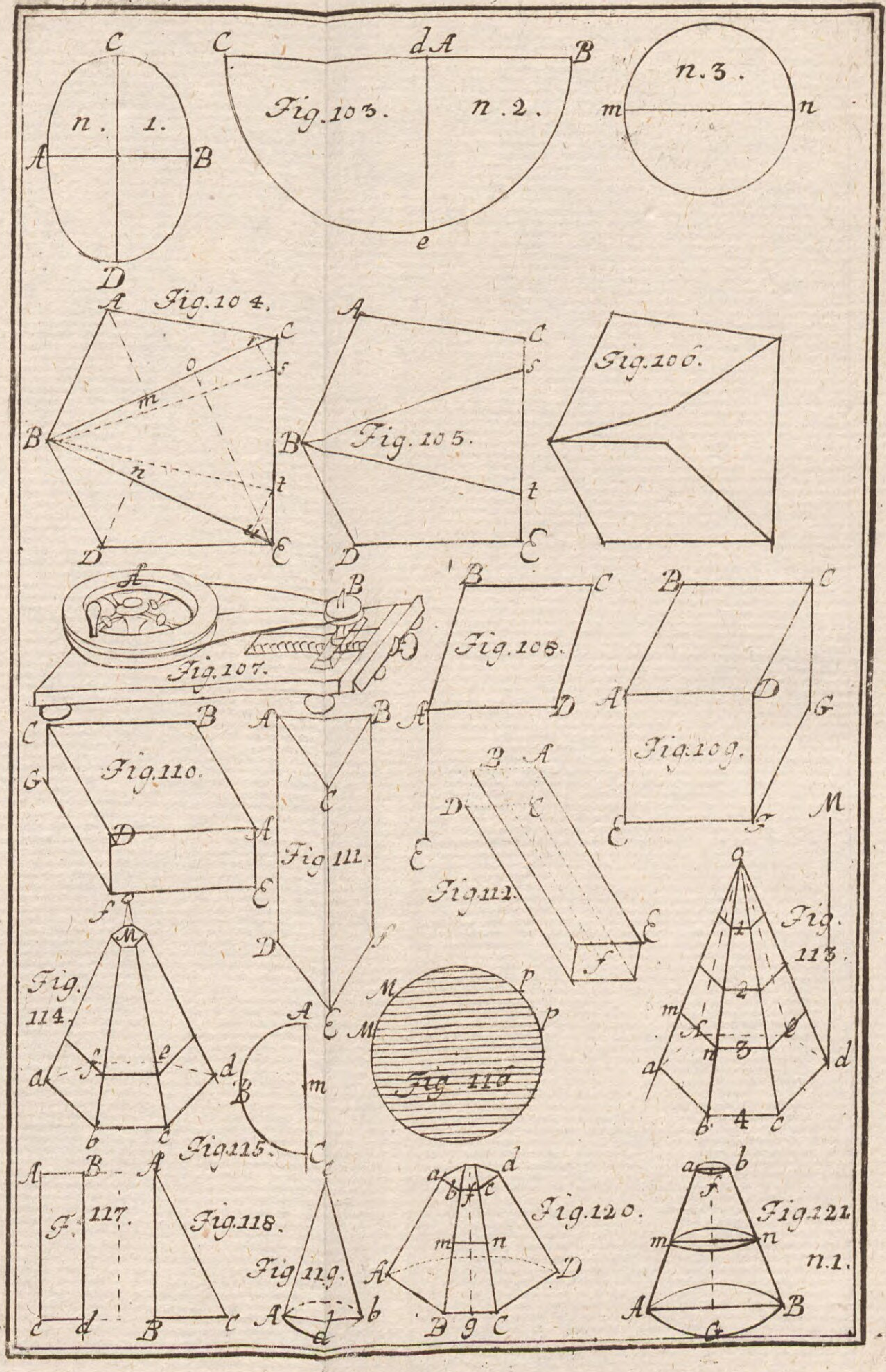


Fig. 78.
Fig. 80.
Fig 81.
Fig. 82. n. 1.
Fig. 82. n. 2.
Fig. 82. n. 3.
Fig. 79.
Fig. 83
Fig. 83. n. 2.
Fig. 84. n. 2.
Fig. 85. n. 1.
Fig. 84. n. 3.
Fig. 84. n. 1.
Fig. 86.
Fig. 85. n. 2.

Tab. 9.


N. 1.
Fig. 88.
Fig. 87
N. 2.
Fig. 89.
Fig. 90
Fig. 91
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 96.
Fig. 100.
Fig. 102.
Fig. 101.

Tab. 10.



n. 1.
Fig. 103.
n. 2.
n. 3.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
n. 1.

Tab. 11.

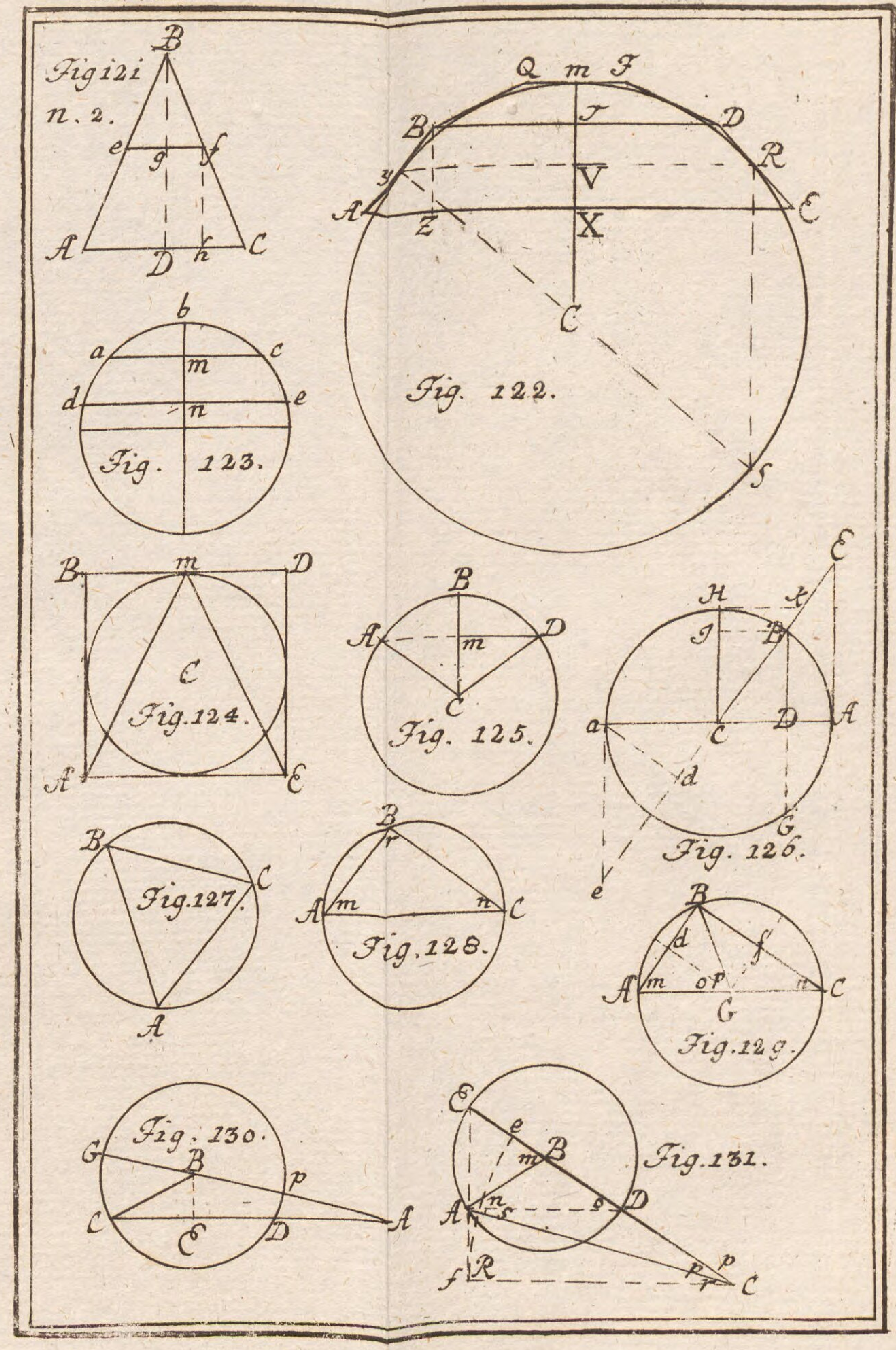


Fig. 121 n. 2.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.
Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130.
Fig. 131.

Tab. 12.

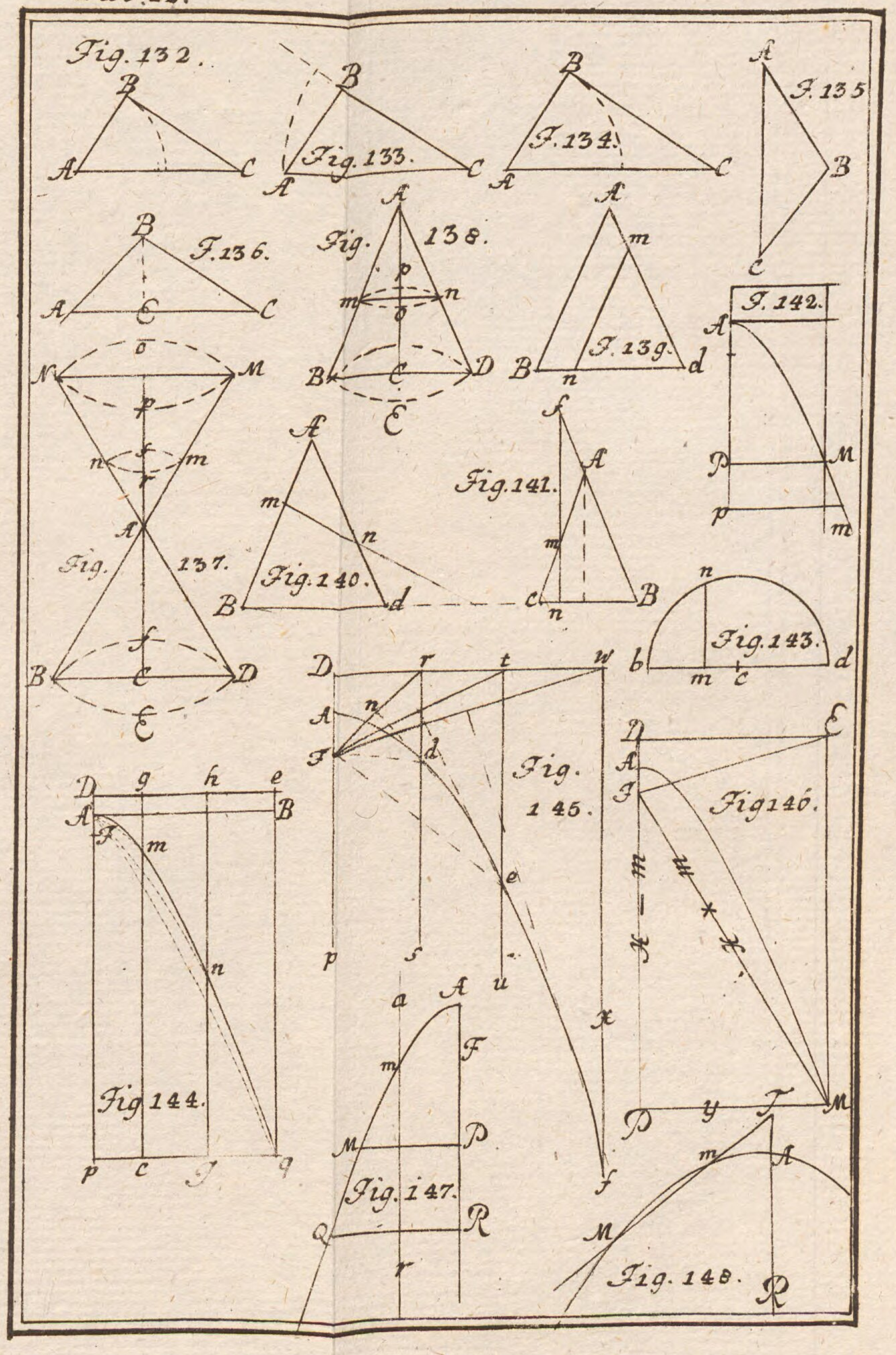


Fig. 132.
Fig. 133.
F. 134.
F. 135
F. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
F. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
F. 142.
Fig. 143.
Fig 144.
Fig. 145.
Fig 146.
Fig. 147.
Fig. 148.

Tab. 13.

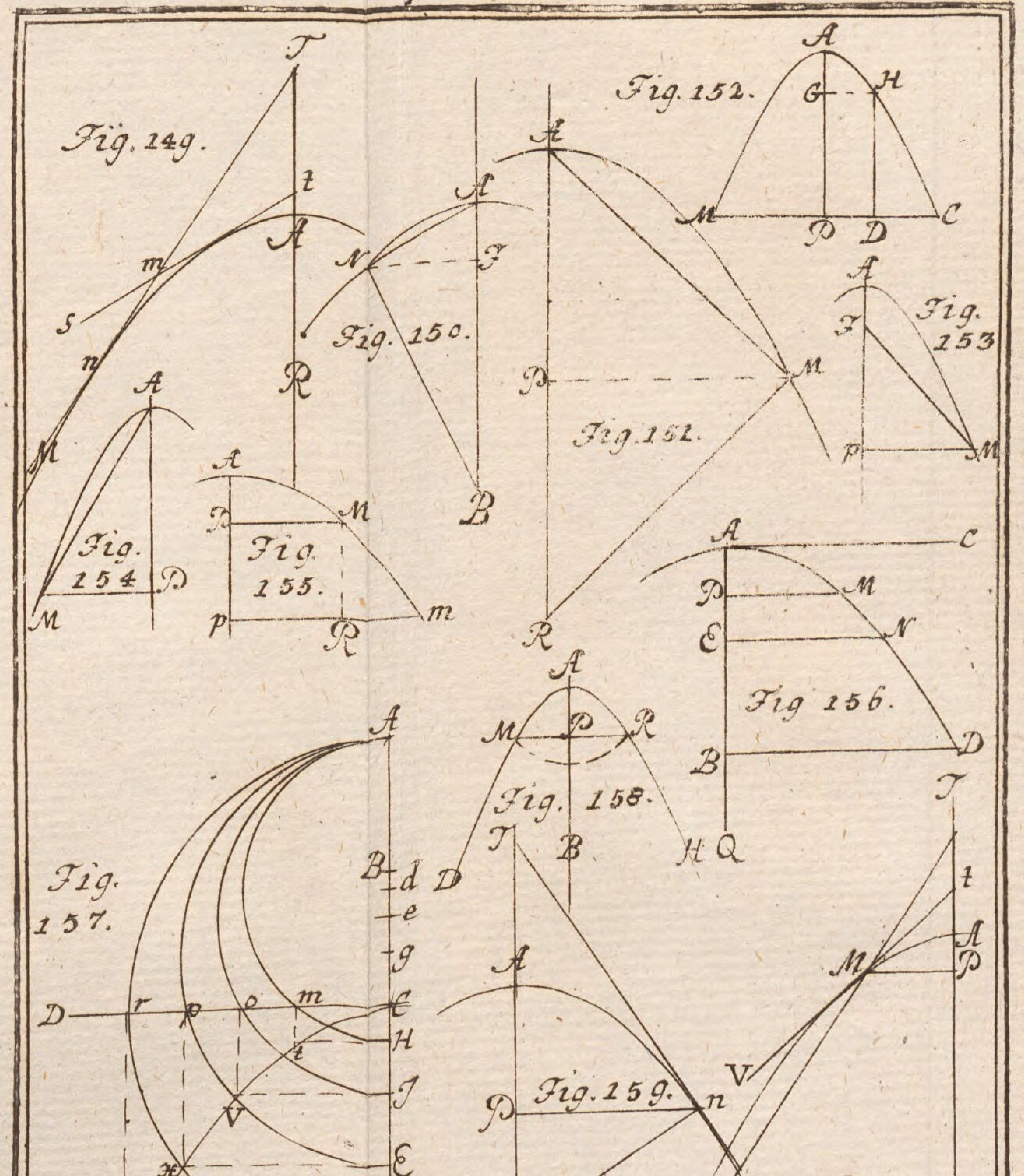


Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153
Fig. 154
Fig. 155.
Fig. 156.
Fig. 157.
Fig. 158.
Fig. 159.
Fig. 160.

Tab. 14.

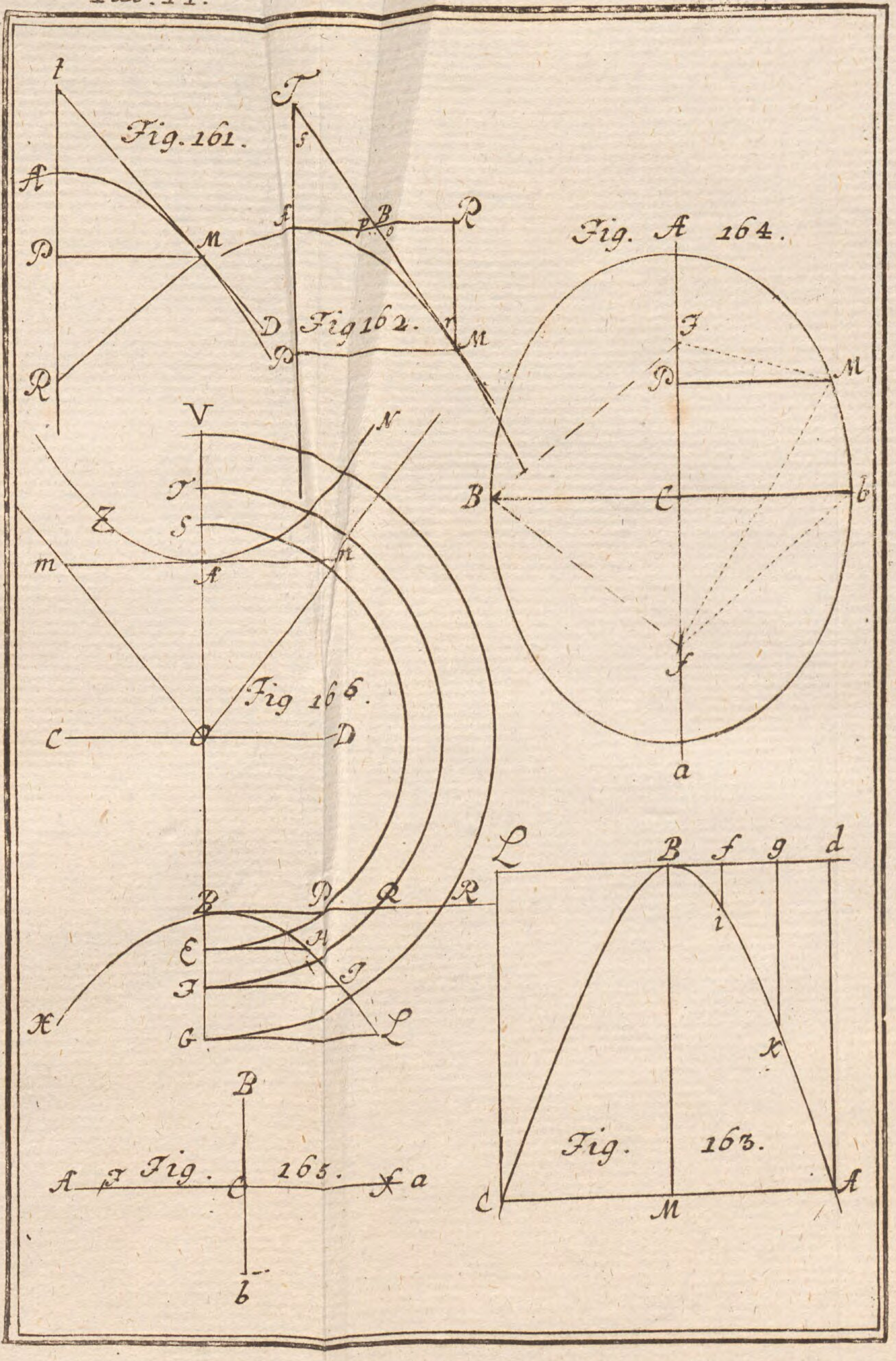


Fig. 161.
Fig 162.
Fig. A 164.
Fig 166.
Fig. 163.
Fig. 165.
t
A
P
M
D
R
T
s
p B o
R
r
M
P
F
M
B
C
b
f
a
V
N
T
S
Z
m
A
n
C
O
D
B
D
Q
R
E
H
F
G
G
K
L
L
B
f
g
d
i
k
C
M
A
B
A
C
a
b

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Barth, Anton <<von>>,

Anwendung der feinern Mathematick auf die Physick, und Artillerie

Bd.: [1]

München 1772

Math.u. 12-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10593681-0
VD18 90133226